Studio funzioni

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'espressione analitica di una funzione $f(x)$ che presenta le seguenti caratteristiche:

1. il dominio è $\mathbb{R} - \{2\}$;

2. i punti di intersezione con gli assi sono $O(0; 0)$ e $A(3; 0)$;

3. $x = 2$ è asintoto verticale e $y = -2$ è asintoto orizzontale;

4. $f(x) > 0$ per $0 < x < 3$.

1. Consideriamo che il dominio è $\mathbb{R} - \{2\}$ e $x = 2$ è asintoto verticale. Possiamo scrivere, come funzione che ha queste caratteristiche, $f(x) = \dfrac{N(x)}{(x-2)^n}$, con n e $N(x)$ da precisare.

2. La funzione $f(x)$ passa per l'origine e per $A(3; 0)$, quindi $f(0) = 0$ e $f(3) = 0$, ossia $f(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = 3$, perciò una possibilità è:

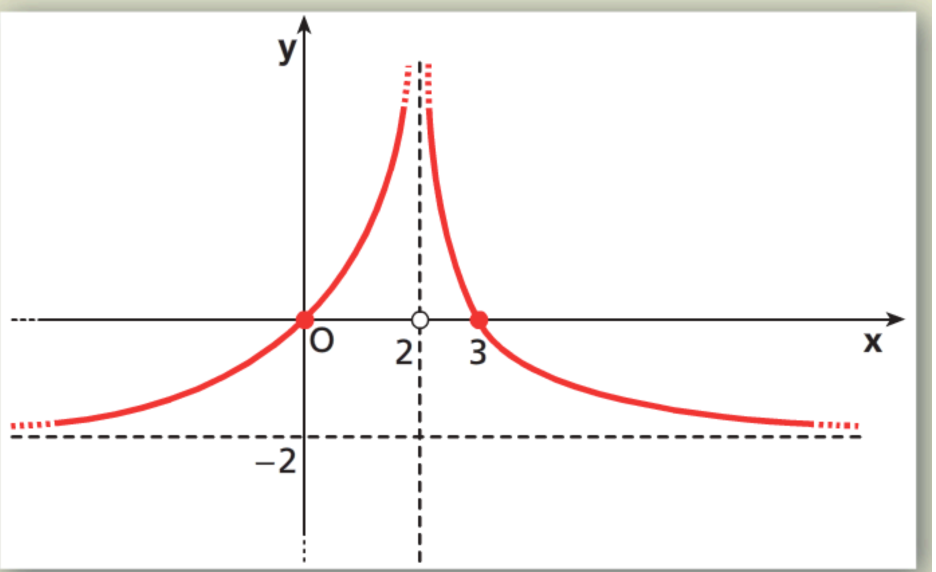
   $$f(x) = \frac{kx(x-3)}{(x-2)^n}, \text{ con } k \text{ e } n \text{ da definire.}$$

3. Siccome $y = -2$ è asintoto orizzontale, deve essere $\lim_{x \to \infty} f(x) = -2$, perciò il numeratore e il denominatore di $f(x)$ devono essere dello stesso grado, e il rapporto dei coefficienti di grado massimo deve essere -2; quindi:

$$f(x) = \frac{-2x(x-3)}{(x-2)^2}.$$

4. La funzione $f(x)$ trovata rispetta anche la condizione di essere positiva per $0 < x < 3$.

Il grafico della funzione potrebbe essere quello della figura.



Funzioni razionali intere

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = x^4 - 3x^2 + 2.$$

1. Determiniamo il dominio della funzione. Poiché non esistono limitazioni per x, si ha D: $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2. Controlliamo se la funzione presenta delle simmetrie.
Essendo $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 2 = x^4 - 3x^2 + 2 = f(x)$, la funzione è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

3. Intersezioni con gli assi.

Asse y:

$$\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$$ il punto di intersezione con l'asse y è $A(0; 2)$.

Asse x:

$$\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$$

L'equazione ha per soluzioni:

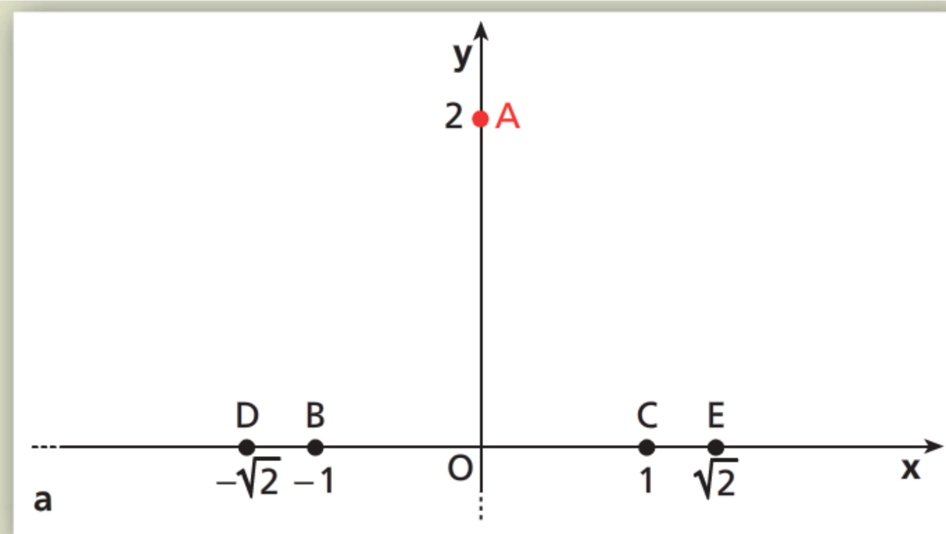
$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -\sqrt{2},\ x_4 = \sqrt{2}\,.$$

I punti di intersezione con l'asse x sono:

$$B(-1;0),\quad C(1;0),$$

$$D(-\sqrt{2};0),\quad E(\sqrt{2};0).$$

Tracciamo gli assi cartesiani per rappresentare le informazioni ottenute finora (figura *a*).



a

4. Studiamo il segno della funzione.

$$x^4 - 3x^2 + 2 > 0$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1) > 0.$$

Primo fattore:

$$x^2 - 2 > 0 \text{ per } x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}\,.$$

Secondo fattore:

$$x^2 - 1 > 0 \text{ per } x < -1 \ \vee\ x > 1.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura *b*).

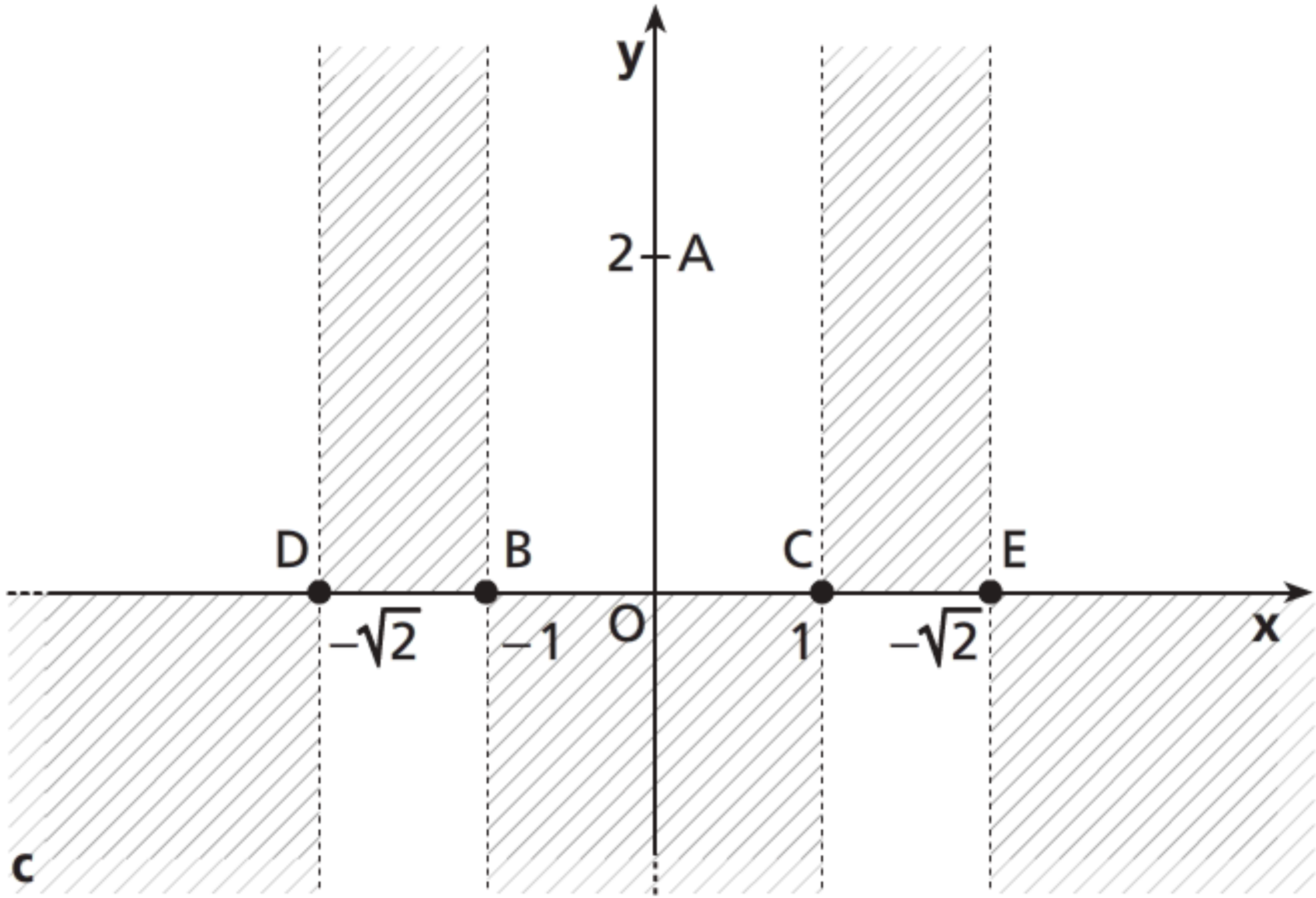
$$f(x) > 0,$$

$$\text{per } x < -\sqrt{2} \vee -1 < x < 1 \vee x > \sqrt{2}\,.$$

		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$	
$x^2 - 2$	+	0	−		−		−	0	+
$x^2 - 1$	+		+	0	−	0	+		+
y	+	0	−	0	+	0	−	0	+

b

Rappresentiamo questi risultati nel riferimento cartesiano, tratteggiando le zone in cui **non** ci sono punti del grafico della funzione (figura *c*).


y
2
A
D
B
C
E
O
x
$-\sqrt{2}$
-1
1
$-\sqrt{2}$
c

5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x \to \pm\infty} (x^4 - 3x^2 + 2) = +\infty$. Poiché la funzione è polinomiale, con grado maggiore di 1, **non** esiste un asintoto obliquo.

6. Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno (per la ricerca di eventuali massimi, minimi e flessi):

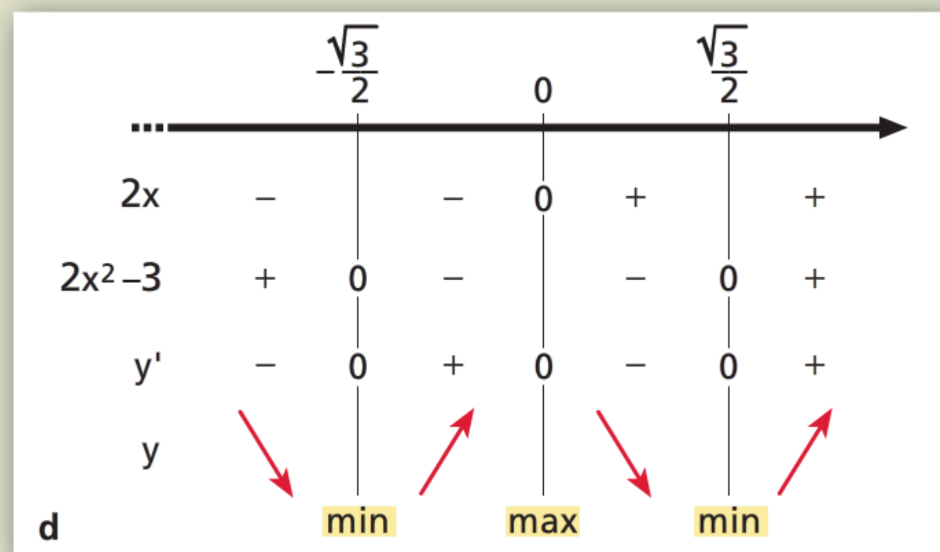
$$y' = 4x^3 - 6x,$$
$$y' > 0 \quad \rightarrow \quad 2x \cdot (2x^2 - 3) > 0.$$

Primo fattore: $2x > 0$ per $x > 0$.

Secondo fattore: $2x^2 - 3 > 0$,

per $x < -\sqrt{\frac{3}{2}} \vee x > \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Compiliamo il quadro relativo al segno della derivata prima e segniamo gli intervalli in cui la funzione è crescente e quelli in cui è decrescente (figura *d*).



d

Per $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ si hanno due punti di minimo.

Calcoliamo le relative ordinate, sostituendo il valore delle ascisse nella funzione e otteniamo:

$$G\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{4}\right),\ H\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{4}\right).$$

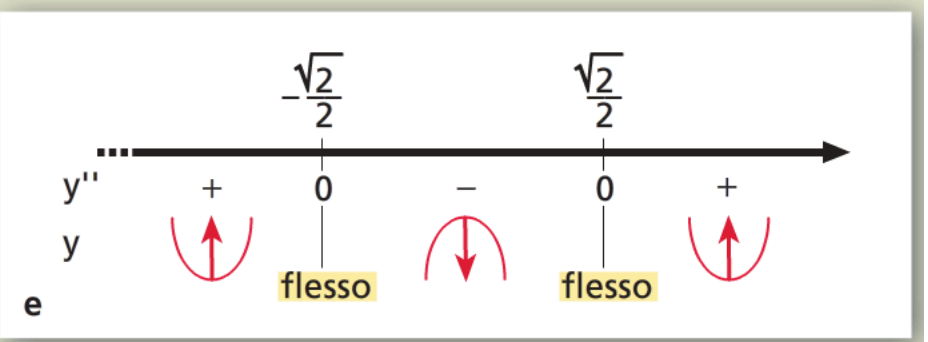
Per $x = 0$ si ha un massimo: $A\,(0; 2)$.

7. Studiamo la derivata seconda per la ricerca degli eventuali flessi:

$$y'' = 12x^2 - 6 = 6 \cdot (2x^2 - 1),$$

$$y'' > 0 \quad \rightarrow \quad 6 \cdot (2x^2 - 1) > 0 \quad \rightarrow \quad x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Compiliamo il quadro dei segni della derivata seconda e segniamo gli intervalli in cui il grafico della funzione ha concavità verso l'alto e quelli in cui l'ha verso il basso (figura *e*).



In $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ abbiamo due flessi di coordinate:

$$F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{4}\right) \text{ e } F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{4}\right).$$

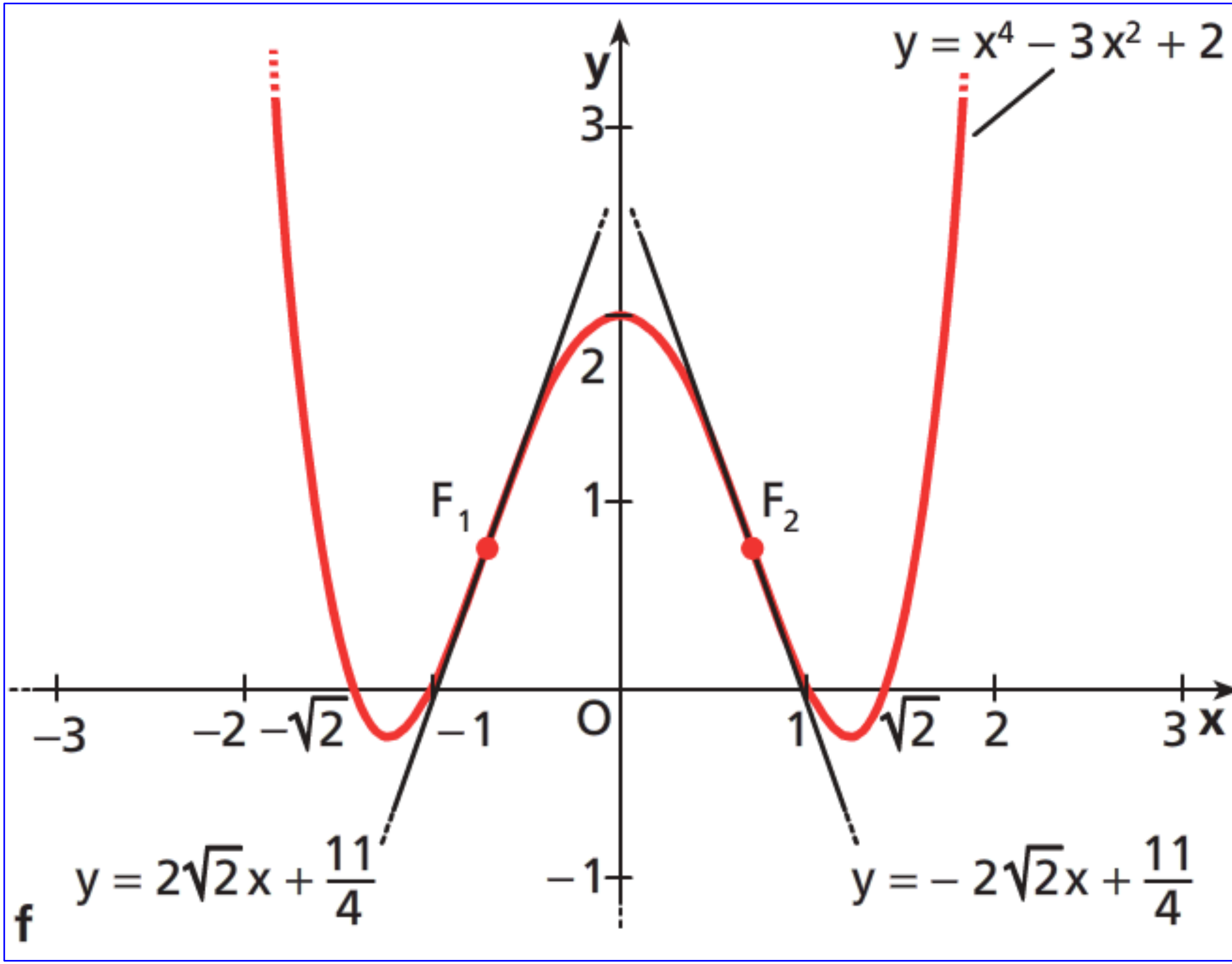
Per completezza, calcoliamo le equazioni delle tangenti inflessionali:

$$m_1 = y'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2};$$

$$m_2 = y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}.$$

Usando la formula della retta passante per un punto e di coefficiente angolare m, $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, si hanno le equazioni:

$$t_1: y = 2\sqrt{2}\,x + \frac{11}{4} \text{ e } t_2: y = -2\sqrt{2}\,x + \frac{11}{4}.$$



$y = x^4 - 3x^2 + 2$
y
x
3
2
1
−1
O
−3
−2
$-\sqrt{2}$
−1
1
$\sqrt{2}$
2
3
F_1
F_2
$y = 2\sqrt{2}x + \frac{11}{4}$
$y = -2\sqrt{2}x + \frac{11}{4}$
f

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2$$

1) **DOMINIO:** $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

2) **SIMMETRIE** : $f(-x) = -4x^3 + 2x^2$ $\neq f(x) \rightarrow$ **NO PARI**

$\neq -f(x) \rightarrow$ **NO DISPARI**

3) **INTERSEZIONI CON GLI ASSI :**

$$\begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 4x^3 + 2x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \underline{(0,0) \in f(x)}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 4x^3 + 2x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 4x^3 + 2x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2(4x + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \ \vee \ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \underline{\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \in f(x)}$$

4) SEGNO:

$$f(x)>0 \rightarrow 4x^3+2x^2>0 \rightarrow x^2(4x+2)>0$$

$$x^2>0 \rightarrow x\neq 0$$

$$4x+2>0 \rightarrow x>-\frac{1}{2}$$

	$-\frac{1}{2}$		0	
$+$		$+$	0	$+$
$-$	0	$+$		$+$
$-$	0	$+$	0	$+$

$$\begin{cases} f(x)>0 \rightarrow x>-\frac{1}{2} \wedge x\neq 0 \\ f(x)<0 \rightarrow x<-\frac{1}{2} \end{cases}$$

5) LIMITI :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2(4x+2) = +\infty\cdot(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x(4x+2) = +\infty \rightarrow$$ NO ASINTOTI OBLIQUI

6) DERIVATE :

$f'(x) = 12x^2 + 4x$

$f'(x) \geq 0 \rightarrow 4x(3x+1) \geq 0$

$4x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$

$3x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$

		$-\frac{1}{3}$		0	
	$-$		$-$		$+$
	$-$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{27} \rightarrow \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$ MAX

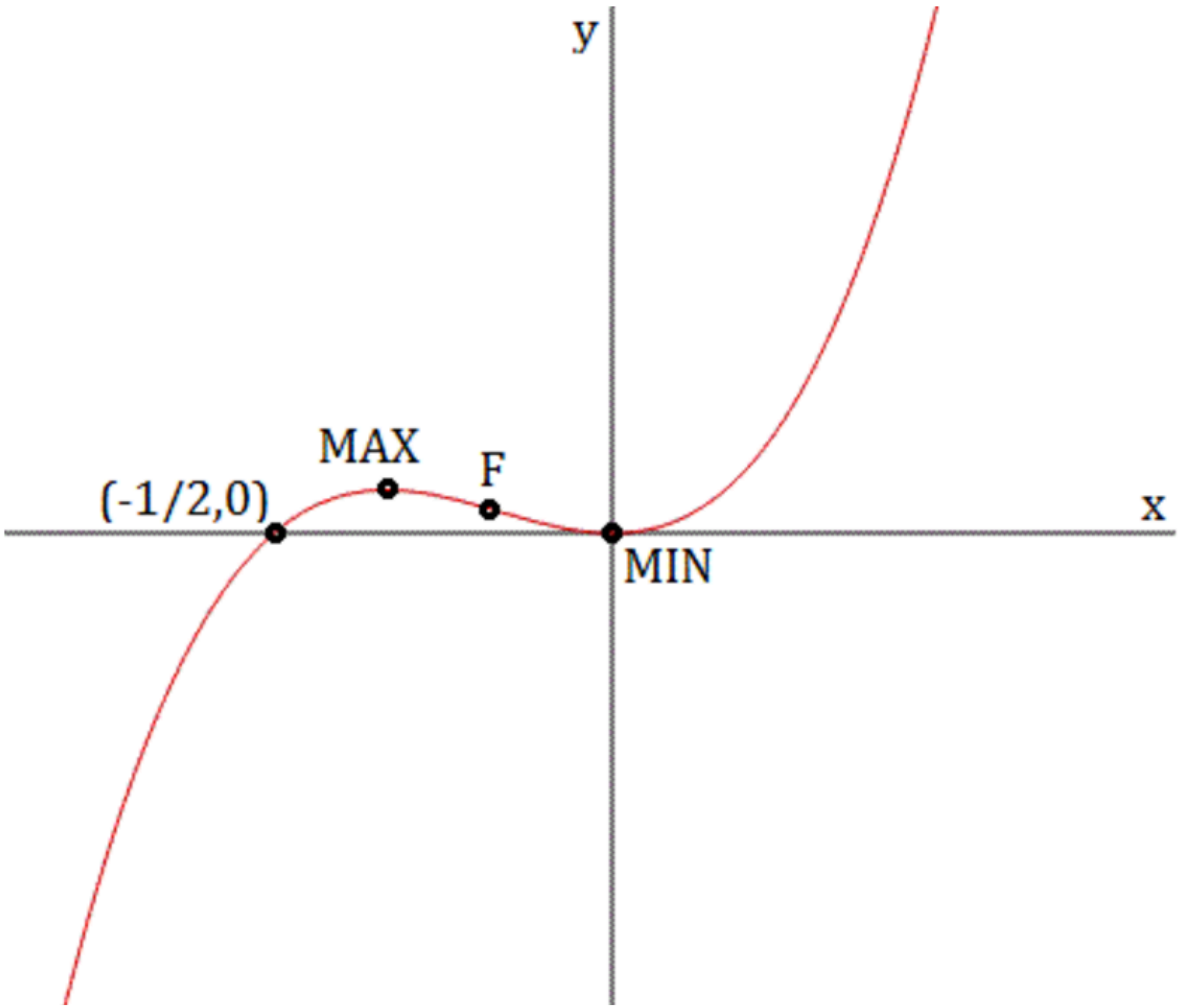
$f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$ MIN

$f''(x) = 24x + 4$

$f''(x) \geq 0 \rightarrow 24x + 4 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{1}{6}$

	$-\frac{1}{6}$		
$-$		$+$	$f''(x)$
$\cap$	F	$\cup$	$f(x)$

$f\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{27} \rightarrow \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{27}\right)$ F $\rightarrow$ PUNTO DI FLESSO



y
x
MAX
F
(-1/2,0)
MIN

Funzioni razionali fratte

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \frac{(2-x)^3}{3(x-4)}.$$

1. Determiniamo il dominio della funzione. Il suo denominatore deve essere non nullo. Quindi:

   $D: x \neq 4.$

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

   $$f(-x) = \frac{[2-(-x)]^3}{3(-x-4)} = \frac{(2+x)^3}{-3(x+4)}.$$

   Poiché $f(-x) \neq -f(x)$ e $f(-x) \neq f(x)$, la funzione non è né dispari né pari.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

Asse y:

$$\begin{cases} y = \dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{8}{-12} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

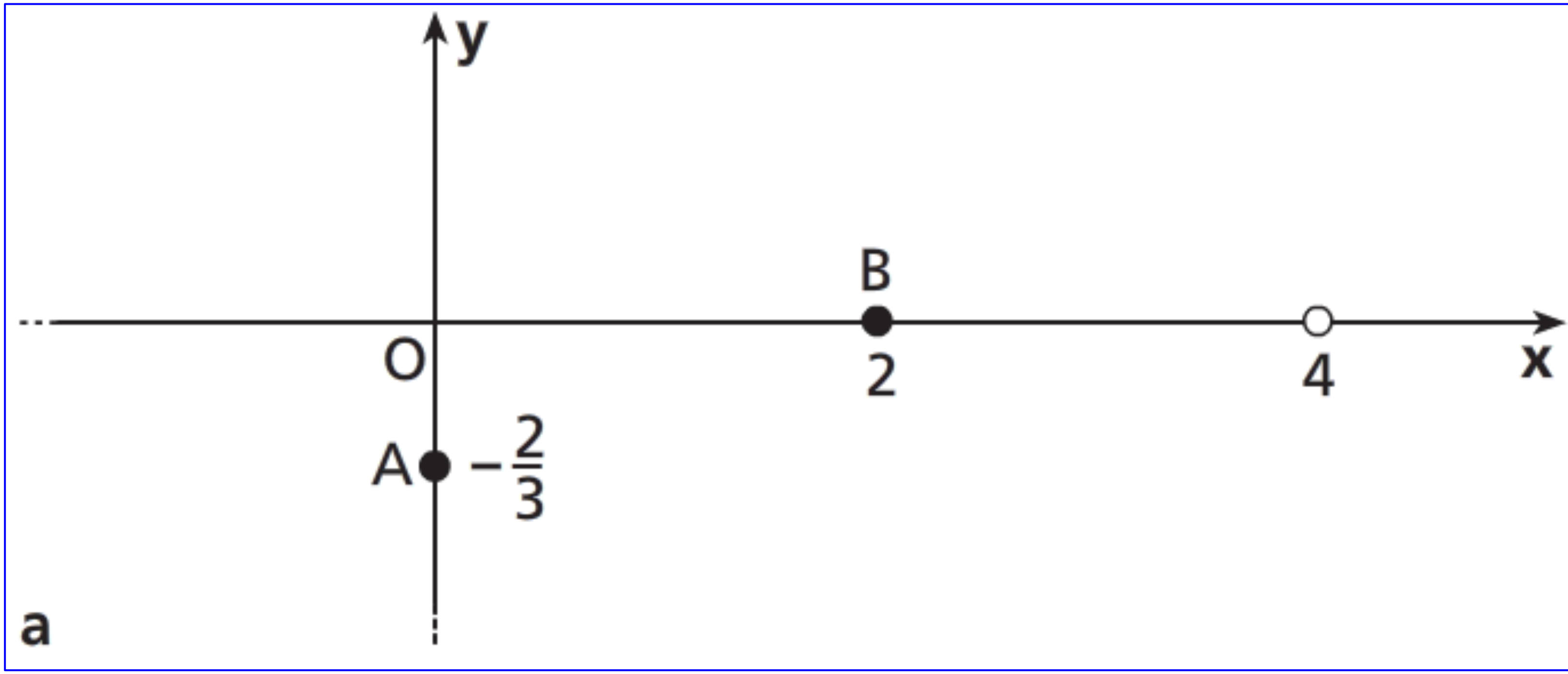
Il punto di intersezione con l'asse y è $A\left(0; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Asse x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{(2-x)^3}{3(x-4)} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2-x)^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2-x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse x è $B(2; 0)$.

Nel piano cartesiano rappresentiamo le informazioni ottenute (figura a).



4. Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{(2-x)^3}{3(x-4)} > 0 \qquad \begin{array}{l} N > 0 \ \text{ per } \ x < 2 \\ D > 0 \ \text{ per } \ x > 4. \end{array}$$

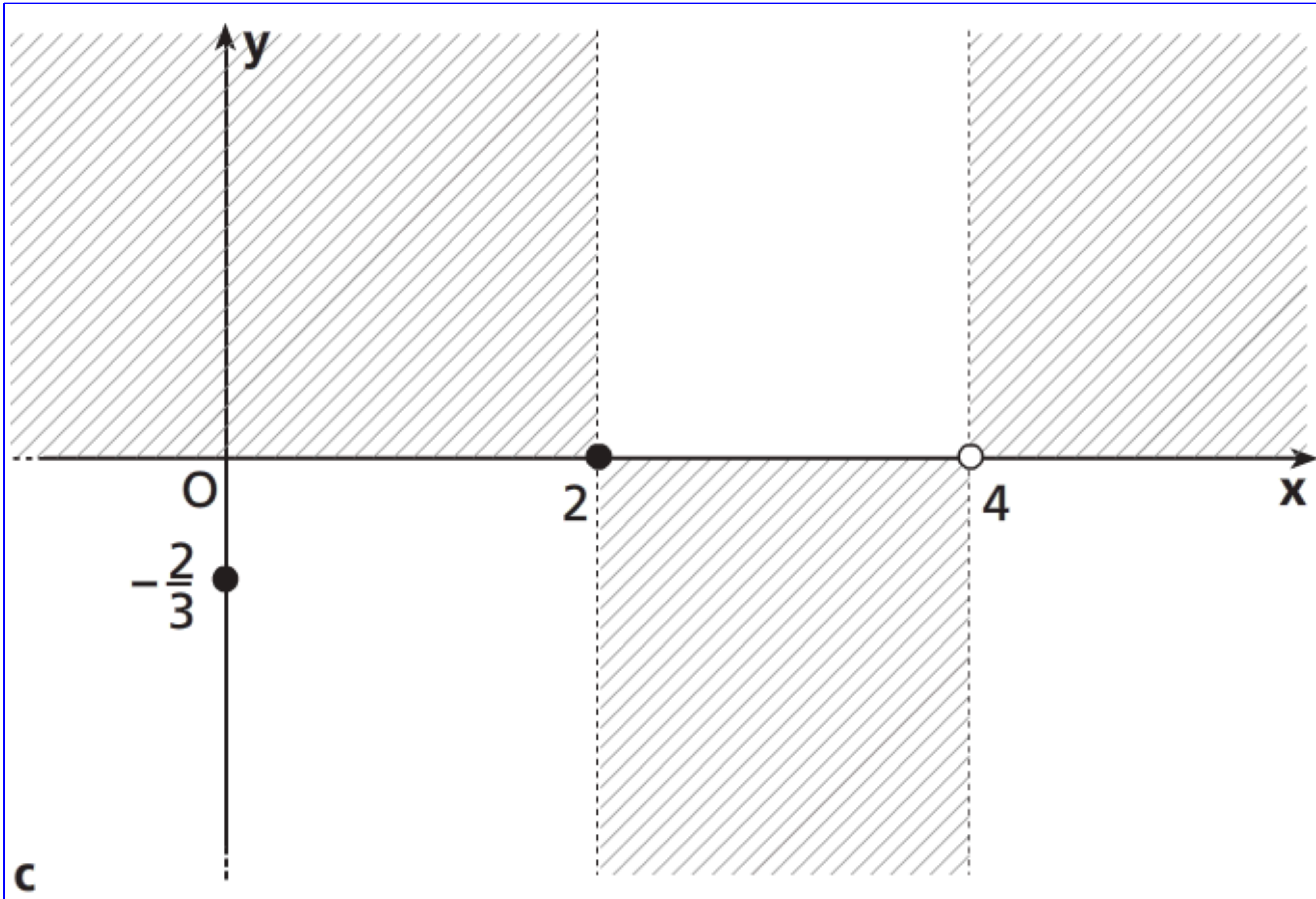
Compiliamo il quadro dei segni (figura *b*).

$f(x) > 0 \qquad$ per $2 < x < 4$.

		2		4	
$(2-x)^3$	$+$	0	$-$		$-$
$3(x-4)$	$-$		$-$	0	$+$
y	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

b

Rappresentiamo questi risultati nel piano cartesiano (figura *c*), tratteggiando le zone del piano in cui non ci sono punti della funzione.


y
O
2
4
x
$-\frac{2}{3}$
c

5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

- $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} = -\infty;$$

  poiché la differenza fra il grado del numeratore e il grado del denominatore è 2, non esiste asintoto obliquo;

- $$\lim_{x \to 4^{\pm}} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} = \mp\infty;$$

  $x = 4$ è un asintoto verticale.

6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi della funzione. Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{-3(2-x)^2(x-4) - (2-x)^3}{(x-4)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2-x)^2(-2x+10)}{(x-4)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(2-x)^2(5-x)}{(x-4)^2}.$$

Il dominio di y' è $x \neq 4$ e coincide con quello di y.

$y' = 0$ per $x = 2$ e $x = 5$, che sono quindi punti stazionari.

$y' > 0 \quad$ per $x < 5 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 4$.

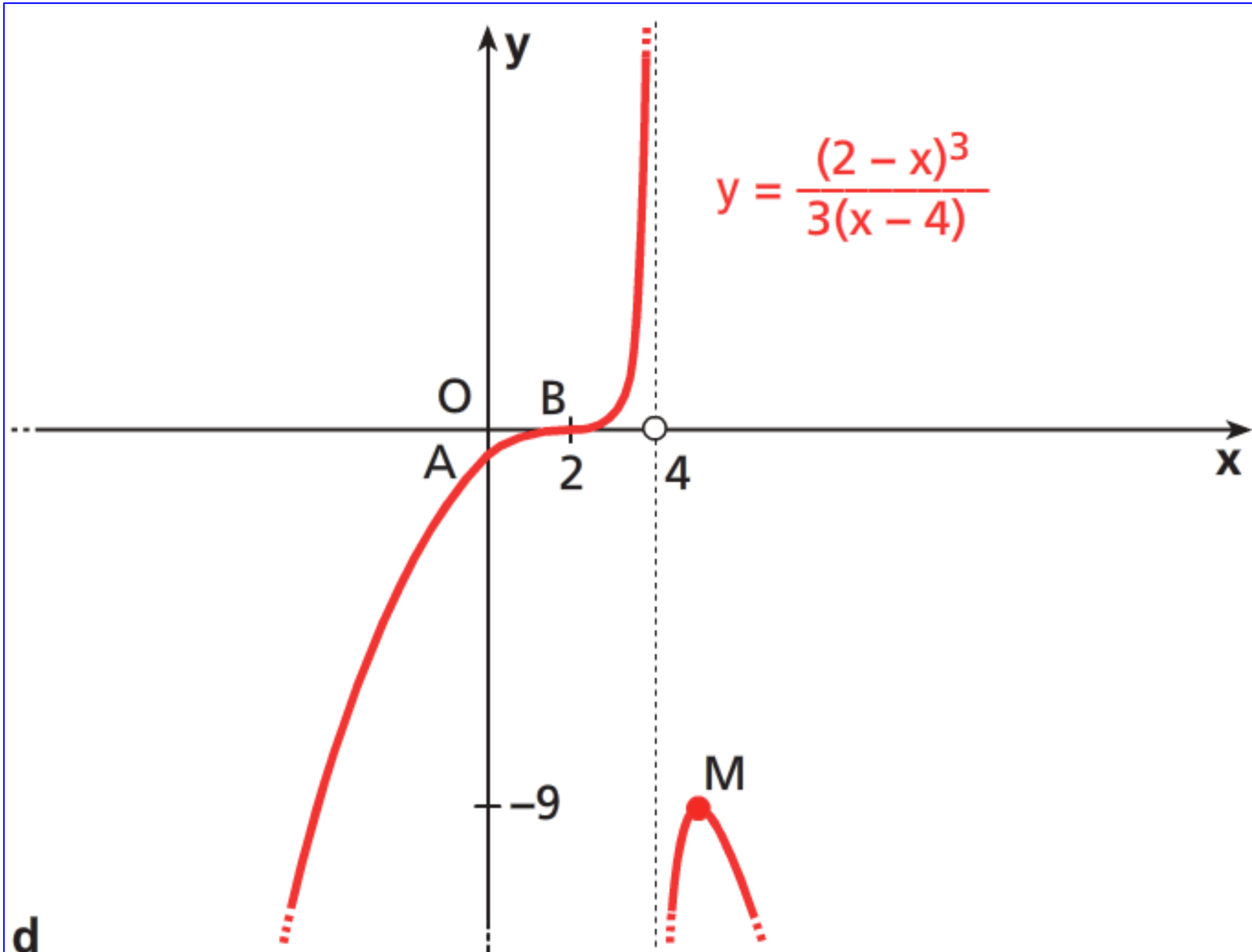
Quindi la funzione è crescente per $x < 5$ e decrescente per $x > 5$. Per $x = 2$ la funzione ammette un flesso orizzontale e per $x = 5$ presenta un punto di massimo relativo. Quindi: $M(5; -9)$, $F(2; 0)$.
Calcoliamo la derivata seconda:

$$y'' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(x-2)(x^2-10x+28)}{(x-4)^3};$$

$y'' < 0$ per $x < 2 \vee x > 4 \quad \rightarrow \quad$ il grafico ha la concavità verso il basso;

$y'' > 0$ per $2 < x < 4 \quad \rightarrow \quad$ il grafico ha la concavità verso l'alto.

In $x = 2$ c'è un punto di flesso (come già trovato con la derivata prima) e in $x = 4$ la funzione non è definita.


y
x
O
A
B
2
4
−9
M
y = (2 − x)³ / 3(x − 4)
d

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$$

1) DOMINIO: $x^2+x-2 \neq 0 \quad (x+2)(x-1) \neq 0$

$$\underline{\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{-2;1\}}$$

2) SIMMETRIE: $f(-x) \begin{cases} \neq f(x) & \text{NO PARI} \\ \neq -f(x) & \text{NO DISPARI} \end{cases}$

3) INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

$\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \underline{(0;-\frac{1}{2}) \in f(x)}$

$\begin{cases} y=0 \\ x^2+x+1=0 \end{cases} \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

4) SEGNO:

$f(x)>0$ $\quad N>0 \to x^2+x+1>0 \to \forall x \in D$

$\quad\quad\quad\quad D>0 \to (x+2)(x-1)>0 \to x<-2 \vee x>1$

$$\begin{cases} f(x)>0 \to x<-2 \vee x>1 \\ f(x)<0 \to -2<x<1 \end{cases}$$

5) LIMITI:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = 1$$

$y=1$ ASINTOTO ORIZZONTALE

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} f(x) = \mp\infty \to x=-2 \text{ ASINTOTO VERTICALE}$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \pm\infty \to x=1 \text{ ASINTOTO VERTICALE}$$

6) DERIVATE:

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+x-2)-(x^2+x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$=\frac{(2x+1)(-3)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{-6x-3}{(x^2+x-2)^2}$$

$f'(x)\geq 0 \rightarrow 2x+1\leq 0 \rightarrow x\leq -\frac{1}{2}$

		$-\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

$x=-\frac{1}{2} \rightarrow$ MAX

$$f''(x)=\frac{-6(x^2+x-2)^2+(6x-3)\cdot 2(x^2+x-2)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2+x-2)(-3x^2-3x+6+12x^2\cancel{+6x}\cancel{-6x}-3)}{(x^2+x-2)^4}$$

$f''(x)\geq 0 \rightarrow (x^2+x-2)(9x^2-3x+3)\geq 0$

$\rightarrow (x+2)(x-1)(3x^2-x+1)\geq 0$

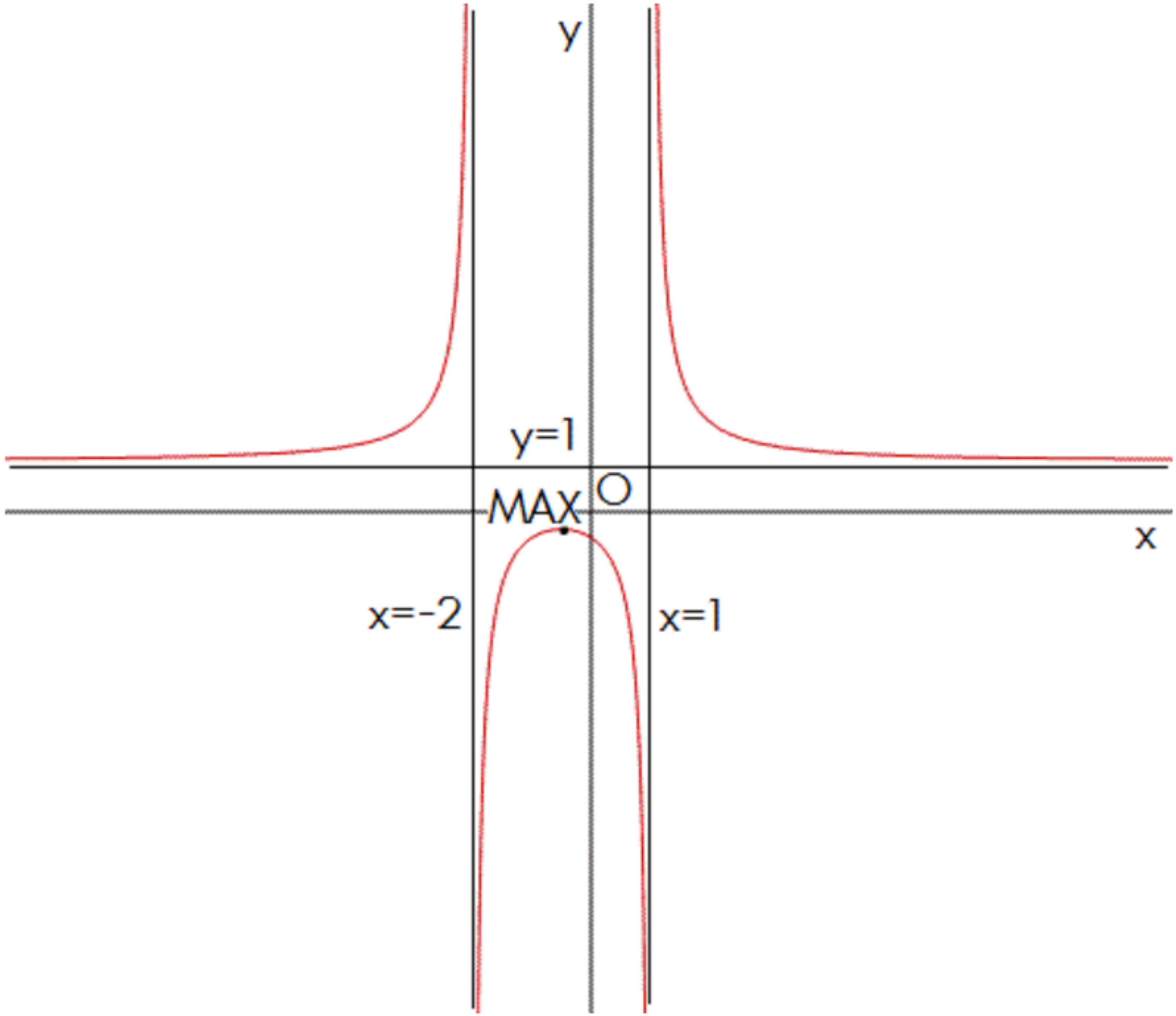
$x+2\geq 0 \rightarrow x\geq -2$

$x-1\geq 0 \rightarrow x\geq 1$

$3x^2-x+1\geq 0 \rightarrow \forall x$

		-2		1	
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\cup$	$\emptyset$	$\cap$	$\emptyset$	$\cup$

NO FLESSI


y
y=1
O
MAX
x
x=-2
x=1

Funzioni irrazionali

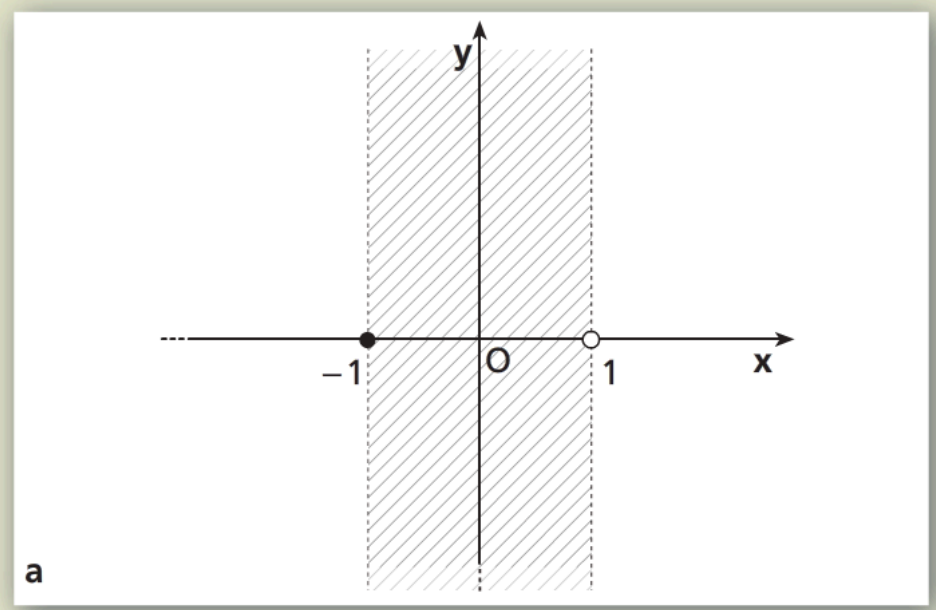
ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

1. Determiniamo il dominio della funzione ponendo il radicando ≥ 0: $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$ per $x \leq -1 \vee x > 1$.
   Il dominio della funzione è $x \leq -1 \;\vee\; x > 1$.

   Rappresentiamo i risultati ottenuti (figura *a*).



2. Cerchiamo eventuali simmetrie. Calcoliamo:

   $$f(-x) = \sqrt{\frac{-x+1}{-x-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

   Essendo

   $$f(-x) \neq \pm f(x),$$

   la funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi.
   Non esiste intersezione con l'asse y in quanto $x = 0$ è escluso dal dominio.

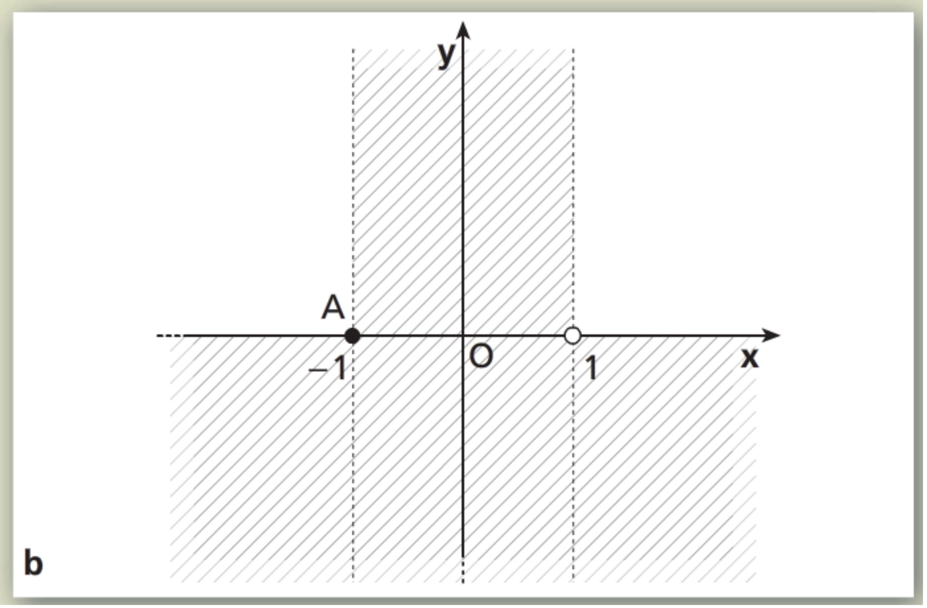
Calcoliamo l'intersezione con l'asse x:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse x è:

$A(-1; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione. $y \geq 0$ per ogni x del dominio, in quanto un radicale è sempre positivo o nullo. Rappresentiamo questo risultato (figura *b*).



b

5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

- $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = 1 \quad \rightarrow \quad y = 1$ asintoto orizzontale;
- $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = +\infty \quad \rightarrow \quad x = 1$ asintoto verticale.

6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi della funzione. Calcoliamo:

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Partendo dal dominio della funzione otteniamo quello della derivata se scartiamo il valore -1, ossia $x < -1 \vee x > 1$. Per questi valori la derivata assume sempre valori negativi, quindi la funzione è decrescente sia per $x < -1$ che per $x > 1$ e non presenta punti di massimo, minimo o flessi orizzontali. Studiamo l'andamento della derivata per $x \to -1$, punto in cui esiste la funzione, ma non la sua derivata:

$$\lim_{x \to -1^-} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left[-\frac{1}{(x-1)^2}\right] = -\infty.$$

Nel punto $x = -1$, la tangente al grafico della funzione è quindi verticale. In tal punto, la funzione ha un minimo assoluto.

Calcoliamo la derivata seconda a partire dalla derivata prima scritta nella seguente forma:

$$y' = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} = -\sqrt{\frac{\cancel{x-1}}{(x+1)(x-1)^{\cancel{4}\,3}}} = -\sqrt{\frac{1}{(x+1)(x-1)^3}};$$

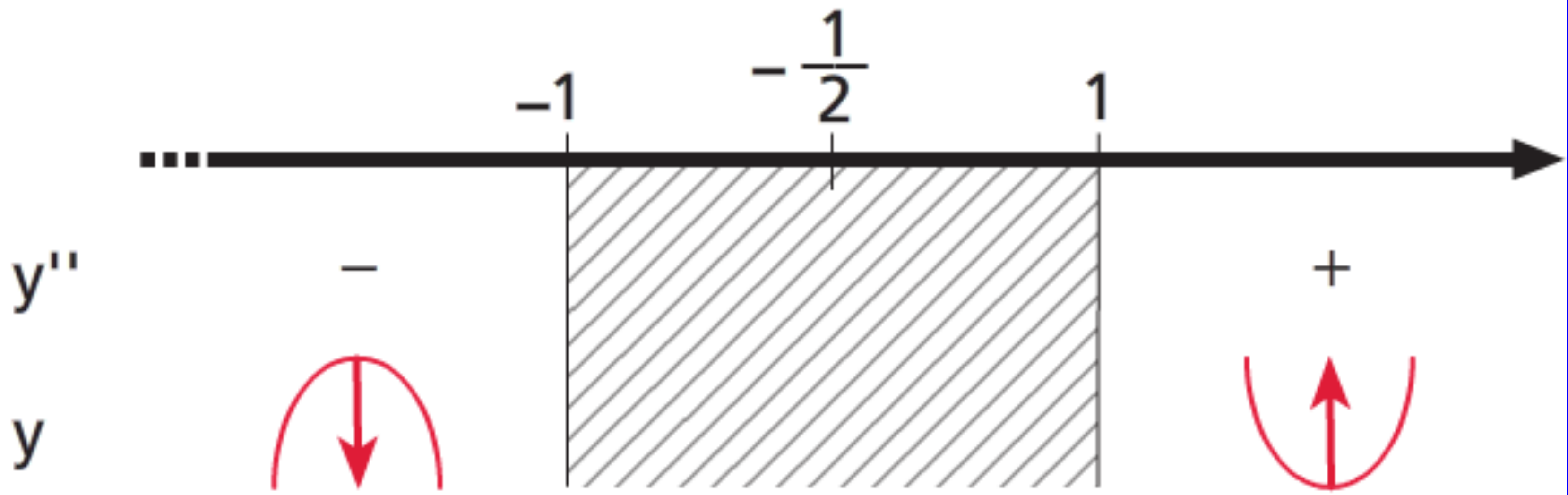
$$y'' = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{(x+1)(x-1)^3}}} \cdot \frac{-[(x-1)^3 + (x+1)\cdot 3\cdot (x-1)^2]}{(x+1)^2(x-1)^6} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{\cancel{(x-1)^2}(x-1+3x+3)}{(x+1)^2(x-1)^{\cancel{6}\,4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{4x+2}{(x+1)^2(x-1)^4} = \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{(x+1)(x-1)^3} \cdot \frac{\cancel{2}(2x+1)}{(x+1)^2(x-1)^4}.$$

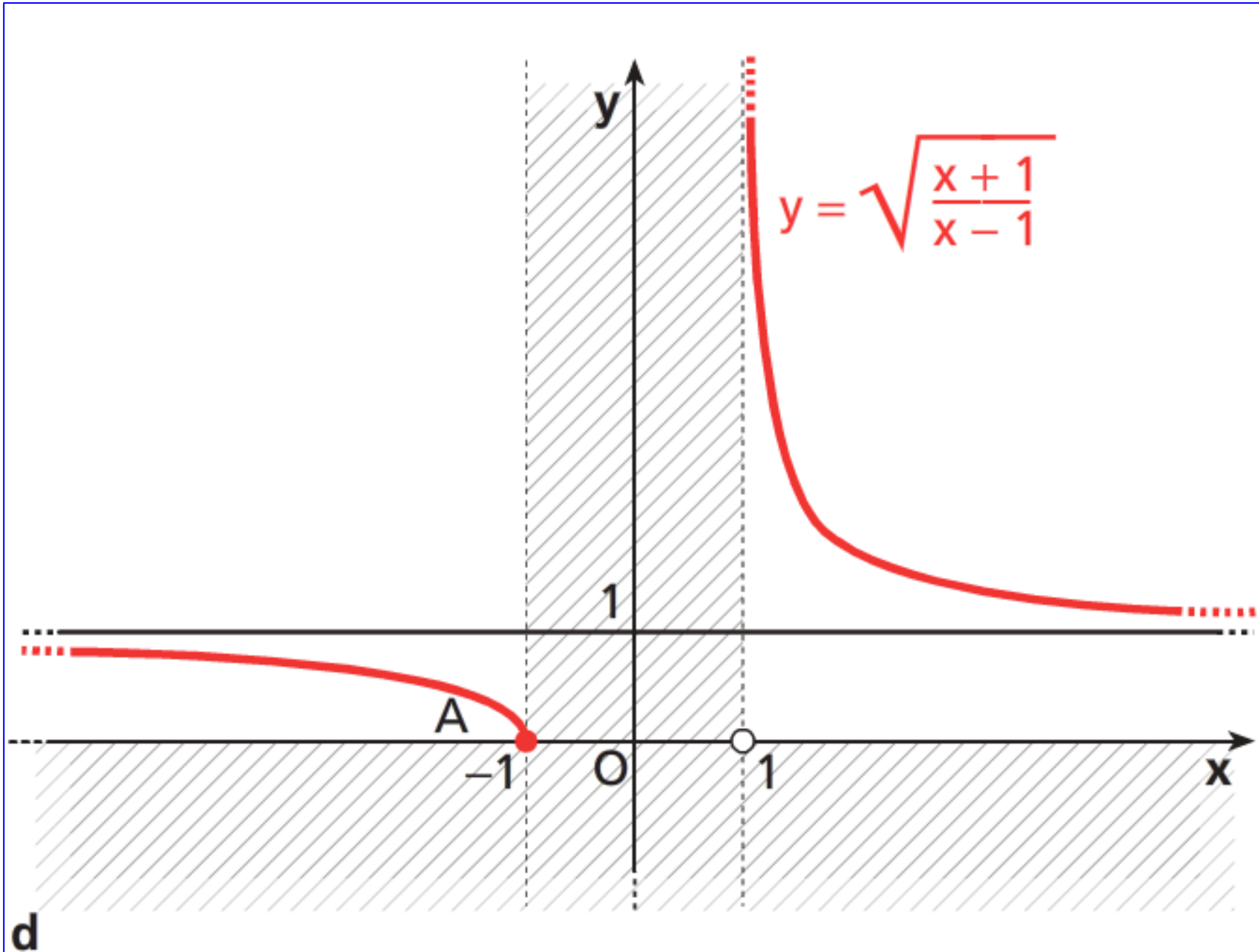
Il segno della derivata seconda è positivo per $x > -\frac{1}{2}$.

Tenuto conto delle condizioni di esistenza, compiliamo il quadro dei segni (figura *c*).



c

La concavità è rivolta verso il basso per $x < -1$, verso l'alto per $x > 1$.



y
$y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
1
A
−1
O
1
x
d

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1) DOMINIO:

$x^2+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \underline{D=\mathbb{R}}$

2) SIMMETRIE: $f(-x)=\dfrac{-x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\begin{cases} \neq f(x) & \text{NO PARI} \\ \neq -f(x) & \text{NO DISPARI} \end{cases}$

3) INT. CON GLI ASSI:

$\begin{cases} x=0 \\ f(x)=-1 \end{cases} \rightarrow \underline{(0,-1)\in f(x)}$ $\quad \begin{cases} f(x)=0 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow \underline{(1,0)\in f(x)}$

4) SEGNO:

$$f(x) \geq 0 \to x-1 \geq 0 \to x \geq 1$$

$$\begin{array}{c|c} & 1 \\ - & + \quad f(x) \end{array}$$

5) LIMITE:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \pm 1$$

$y = \pm 1$

ASINTOTI ORIZZONTALI

6) DERIVATE:

$$f'(x) = \left[\sqrt{x^2+1} - (x-1)\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right]\cdot\frac{1}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$\underline{f'(x) \geq 0} \rightarrow 1 + x \geq 0 \rightarrow \underline{x \geq -1}$

$$
\begin{array}{c|c|c}
 & -1 & \\
f'(x) & - \quad | \quad & + \\
f(x) & \searrow \quad | \quad & \nearrow \\
 & \text{MIN} &
\end{array}
$$

$f(-1) = -\sqrt{2} \rightarrow \underline{(-1, -\sqrt{2})}$ MIN

$$f''(x) = \left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} + (x+1)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+1\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x$$

$$f''(x) = \left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} - 3x(x+1)\left(x^2+1\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}} - \frac{3x(x+1)}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^5}}$$

$$f''(x) = \frac{x^2 + 1 - 3x^2 - 3x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^5}}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^5}}$$

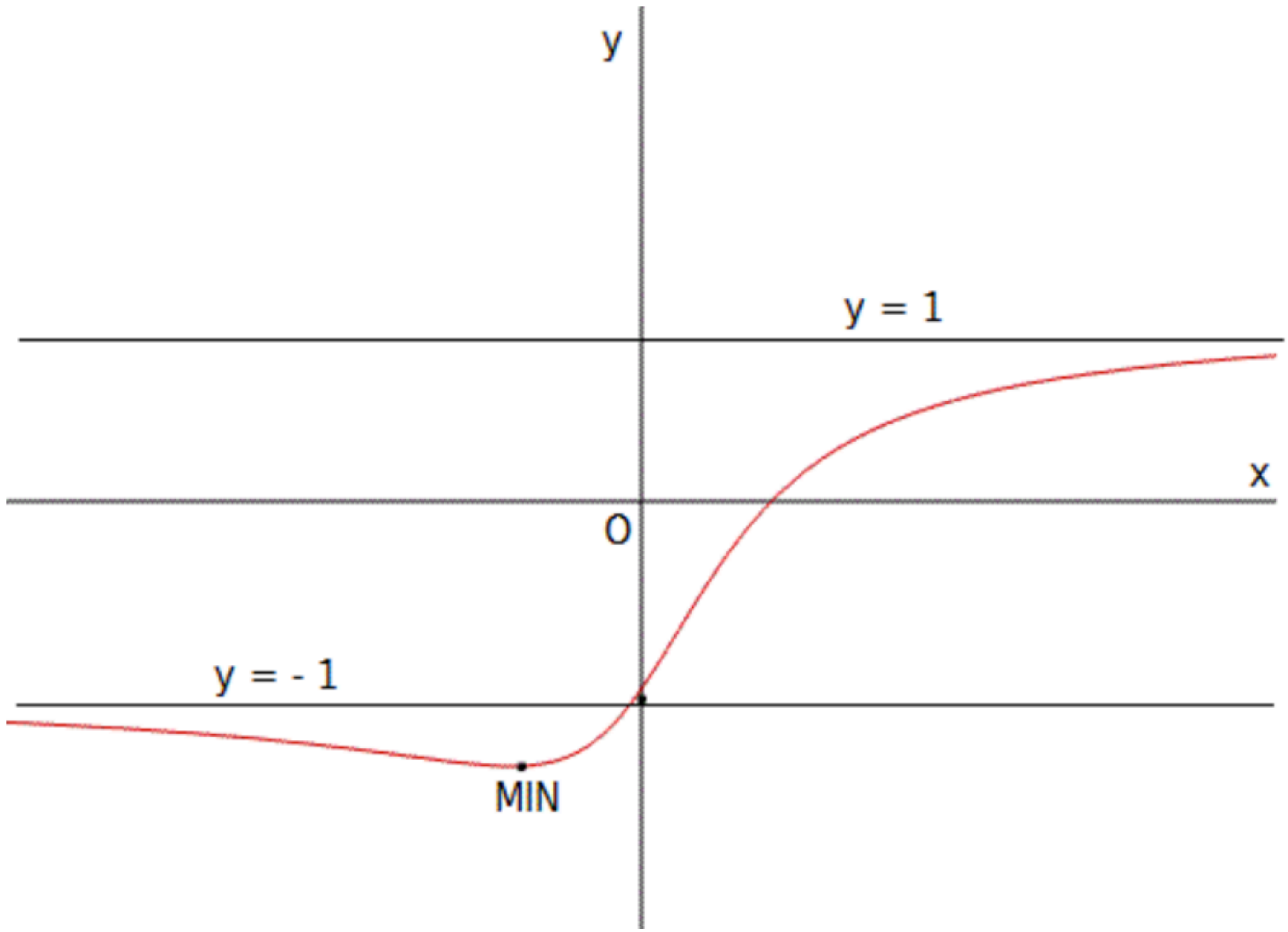
$$f''(x) \geq 0 \rightarrow 2x^2 + 3x - 1 \leq 0$$

$$f''(x) \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \wedge x \leq \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

e otteniamo due flessi:

$$x_{F1} = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$$

$$x_{F2} = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$


y
y = 1
x
O
y = - 1
MIN

Funzioni esponenziali

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = x^2 \cdot e^x.$$

1. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie. Calcoliamo: $f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-x} = x^2 \cdot e^{-x}$.

Poiché $f(-x) \neq \pm f(x)$, la funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi.

Asse y:

$\begin{cases} y = x^2 \cdot e^x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$ il punto di intersezione con l'asse y è $O(0; 0)$.

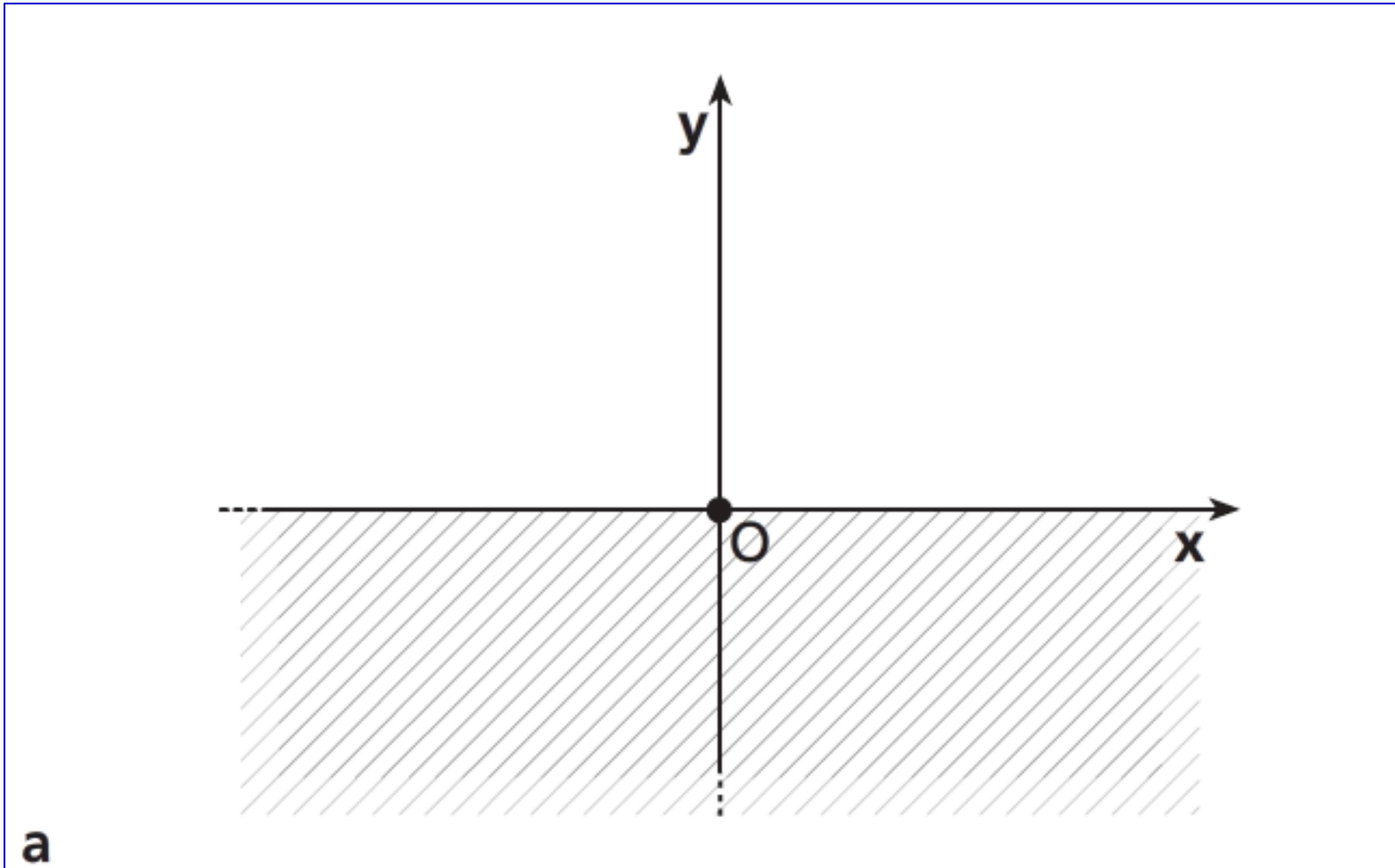
Asse x:

$\begin{cases} y = x^2 \cdot e^x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot e^x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ il punto di intersezione con l'asse x è $O(0; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione:

$$y > 0 \quad \rightarrow \quad x^2 \cdot e^x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Rappresentiamo i risultati finora ottenuti nel riferimento cartesiano (figura *a*).



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio.

- $\lim_{x \to \pm\infty} x^2 \cdot e^x$.

  Poiché per $x \to -\infty$ si ha che $x^2 \to +\infty$ ed $e^x \to 0$, siamo in presenza della forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Scriviamo l'espressione in altra forma,

  $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}},$$

e applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

Quindi:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^x = 0 \quad \to \quad y = 0 \text{ asintoto orizzontale}.$$

Essendo:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^x = +\infty \quad \to \quad \text{potrebbe esistere un asintoto obliquo.}$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \cdot e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot e^x = +\infty \quad \to \quad \text{non esistono asintoti obliqui}.$$

6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi della funzione:

$$y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (2x + x^2);$$

$$y' > 0 \quad \rightarrow \quad e^x \cdot (2x + x^2) > 0.$$

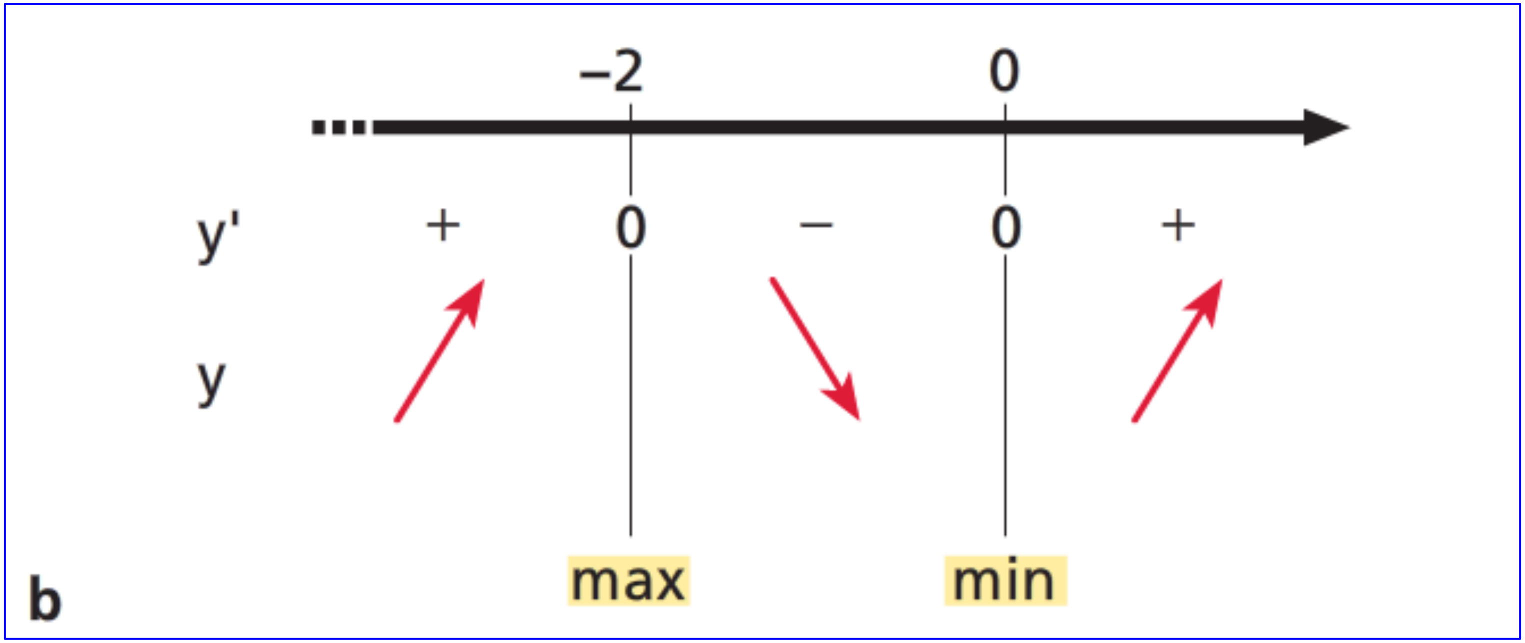
Il primo fattore, e^x, è sempre positivo, quindi il segno del prodotto è lo stesso di quello del secondo fattore: $2x + x^2 > 0$, per $x < -2 \vee x > 0$.

Compiliamo il quadro dei segni (figura *b*).

Per $x = 0$, si ha un punto di minimo: $O(0; 0)$.

Per $x = -2$, si ha un punto di massimo:

$$A\left(-2; \frac{4}{e^2}\right).$$



Calcoliamo la derivata seconda:

$$y'' = e^x \cdot (2x + x^2) + e^x \cdot (2 + 2x) = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2);$$

$$y'' > 0 \quad \rightarrow \quad e^x \cdot (x^2 + 4x + 2) > 0.$$

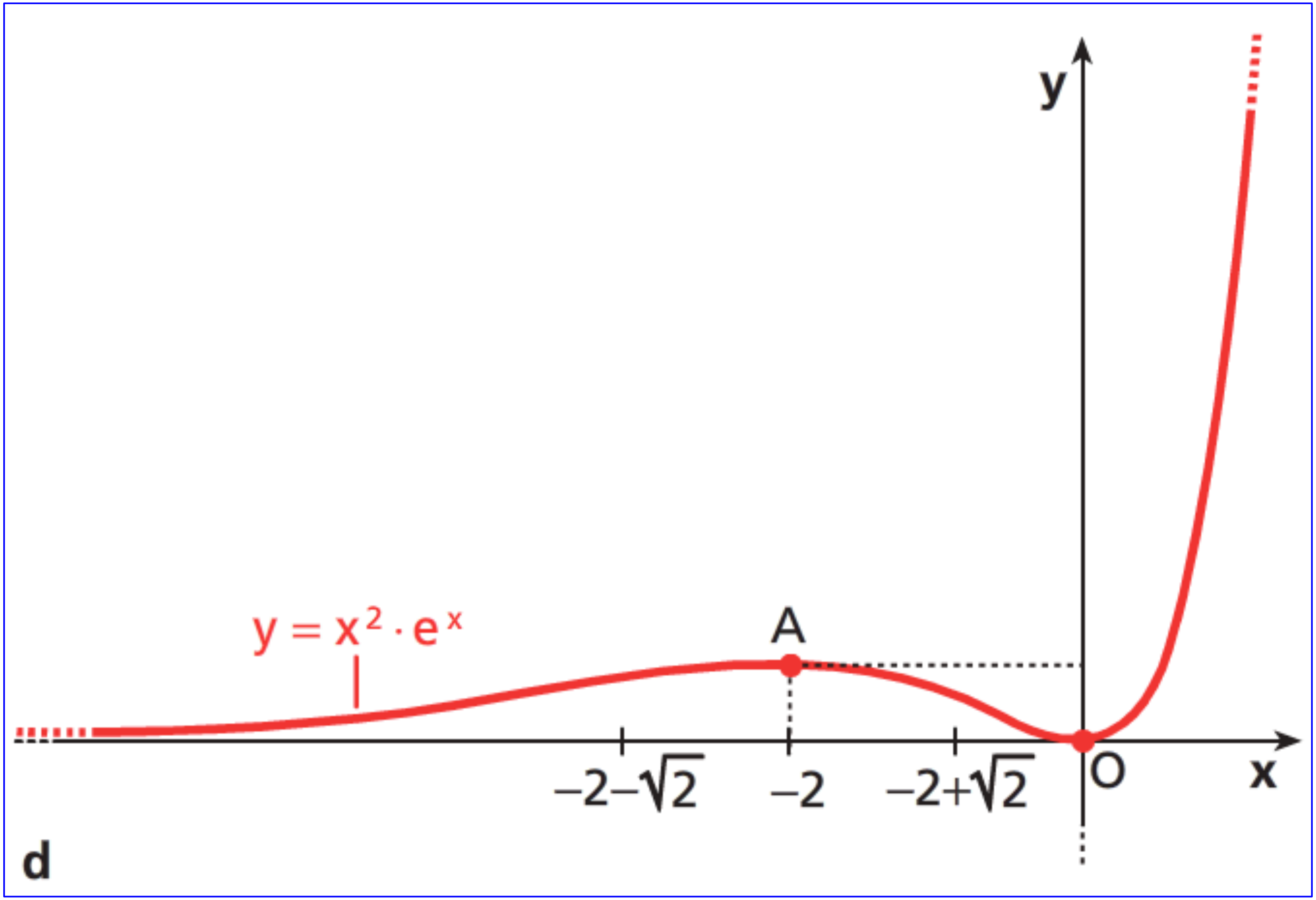
Come per la derivata prima, è sufficiente studiare il segno del secondo fattore:

$$x^2 + 4x + 2 > 0,$$

$$\text{per } x < -2 - \sqrt{2} \vee x > -2 + \sqrt{2}.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura *c*).

I punti di ascissa $-2 - \sqrt{2}$ e $-2 + \sqrt{2}$ sono di flesso per il grafico della funzione.



y
x
O
A
$y = x^2 \cdot e^x$
$-2-\sqrt{2}$
-2
$-2+\sqrt{2}$
d

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$$

1) DOMINIO:

$e^x-1\neq 0 \to e^x\neq 1 \to x\neq 0 \to D=\mathbb{R}-\{0\}$

2) SIMMETRIE:

$f(-x)=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}-1}$ $\neq f(x)$ NO PARI

$\neq -f(x)$ NO DISPARI

3) INT. CON GLI ASSI:

$x=0\notin D$; $f(x)=0\to e^x=0\to\emptyset$

4) SEGNO:

$f(x)>0 \to e^x-1>0 \to e^x>1 \to x>0$

5) LIMITI:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{0^+}{-1} = 0^- \quad \underline{y=0} \text{ ASINTOTO ORIZZONTALE}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{1-0} = 1 \rightarrow \underline{y=1} \text{ ASINTOTO ORIZZONTALE}$$

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty \rightarrow \underline{x=0} \text{ ASINTOTO VERTICALE}$$

6) DERIVATE:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-1) - e^{2x}}{(e^x-1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$\underline{f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{D}} \rightarrow \underline{f(x) \searrow \ \forall x \in \mathbb{D}}$$

NO MAX, NO MIN

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3}$$

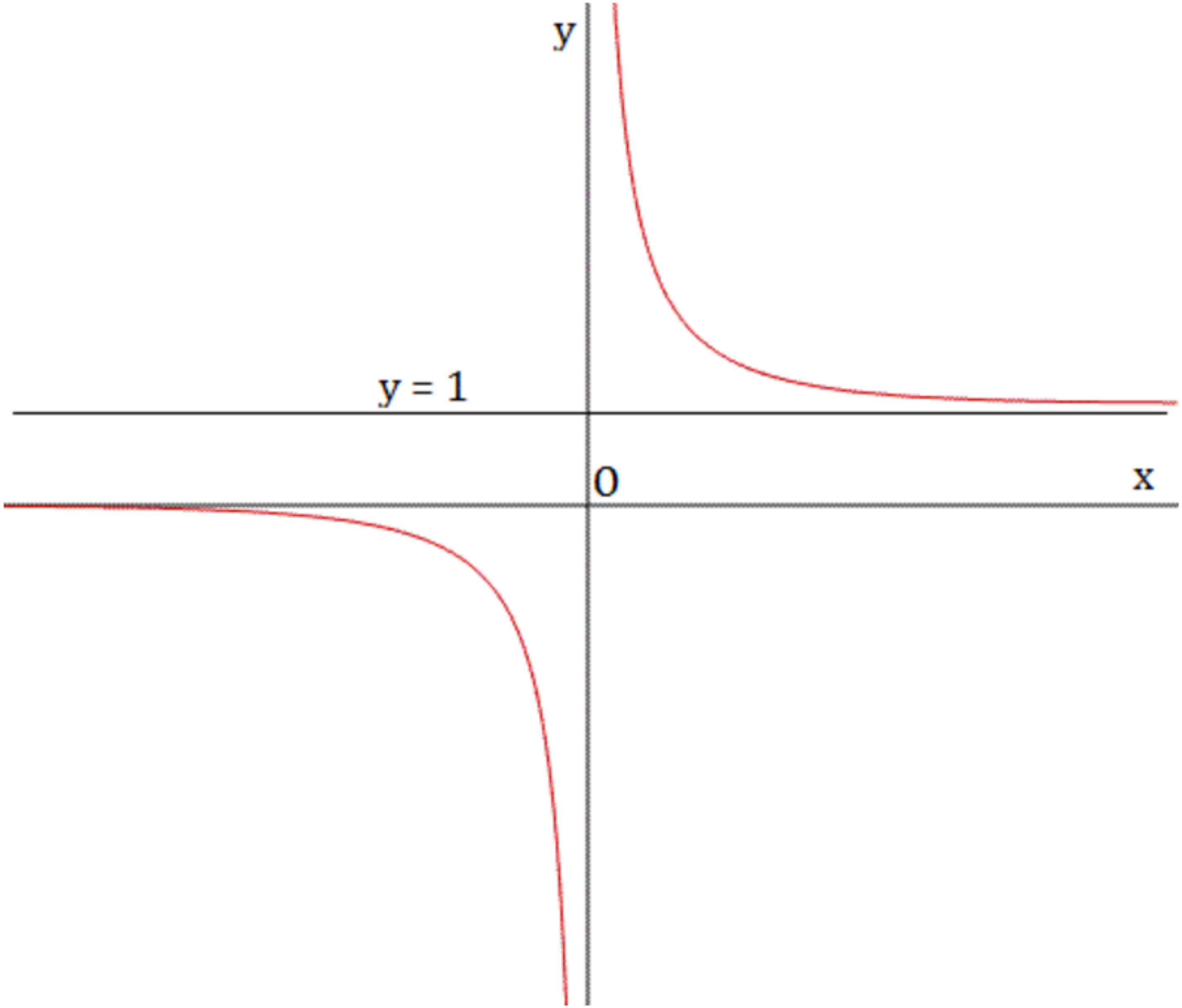
$N > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) \geq 0 \to (e^x-1)^3 > 0$

$e^x > 1 \to x > 0$

		0	
$f''(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\emptyset$	$\cup$

NO FLESSI


y
y = 1
0
x

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

1) DOMINIO : $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

2) SIMMETRIE : $f(-x) = f(x) \rightarrow f(x)$ PARI

3) INT. CON GLI ASSI :

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0) \in f(x)$

4) SEGNO :

$f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

5) <u>LIMITI</u>:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e^{0^-} = 1^- \rightarrow \underline{y=1} \text{ ASINTOTO ORIZZONTALE}$$

6) <u>DERIVATE</u>:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^{-1/x^2}}{x^3} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow x^3 > 0 \rightarrow x \geq 0$$

		0	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

$$f(0) = 0 \rightarrow \underline{(0,0) \text{ MIN}}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4e^{-1/x^2} - 6x^2 e^{-1/x^2}}{x^6} & \text{per } x \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

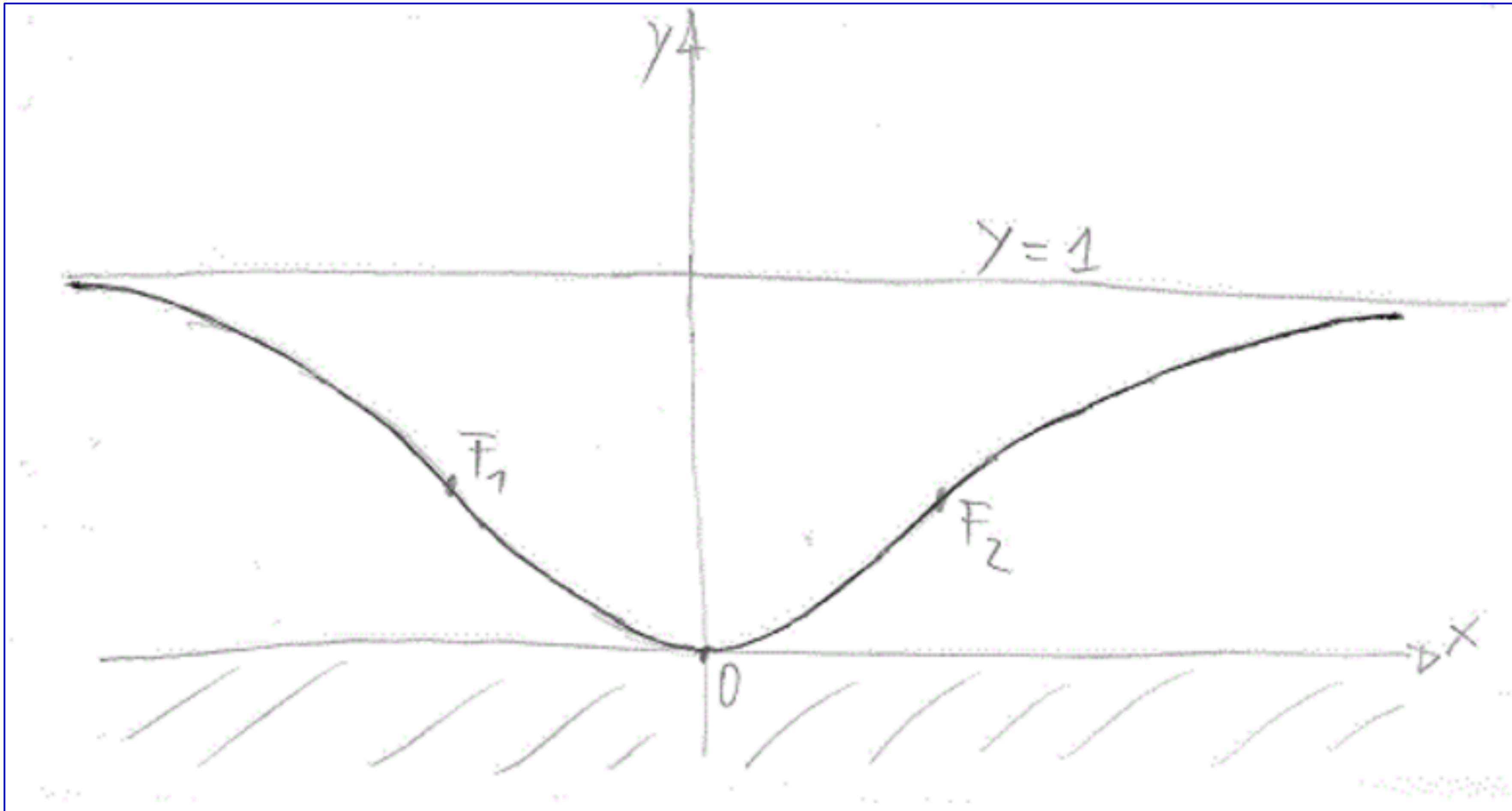
$$f''(x) \geq 0 \rightarrow 2e^{-1/x^2}(2-3x^2) \geq 0$$

$$\rightarrow 2-3x^2 \geq 0 \rightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & -\sqrt{\frac{2}{3}} & & \sqrt{\frac{2}{3}} & \\ f''(x) & - & \mid & + & \mid & - \\ f(x) & \frown & \mid & \smile & \mid & \frown \\ & & F_1 & & F_2 & \end{array}$$

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = e^{-3/2}$$

$$F_{1,2}\left(\mp\sqrt{\frac{2}{3}}; e^{-3/2}\right) \text{ FLESSI}$$


y
y = 1
F1
F2
x
0

Funzioni logaritmiche

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = x^2 \cdot \ln x.$$

1. Determiniamo il dominio della funzione.
   Poiché l'argomento del logaritmo deve essere positivo, il dominio è:

   D: $x > 0$.

2. La funzione non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani in quanto il suo dominio riguarda solo le ascisse positive.

3. Calcoliamo l'intersezione soltanto con l'asse x, perché quella con l'asse y $(x = 0)$ è esclusa dal dominio.
   Asse x:

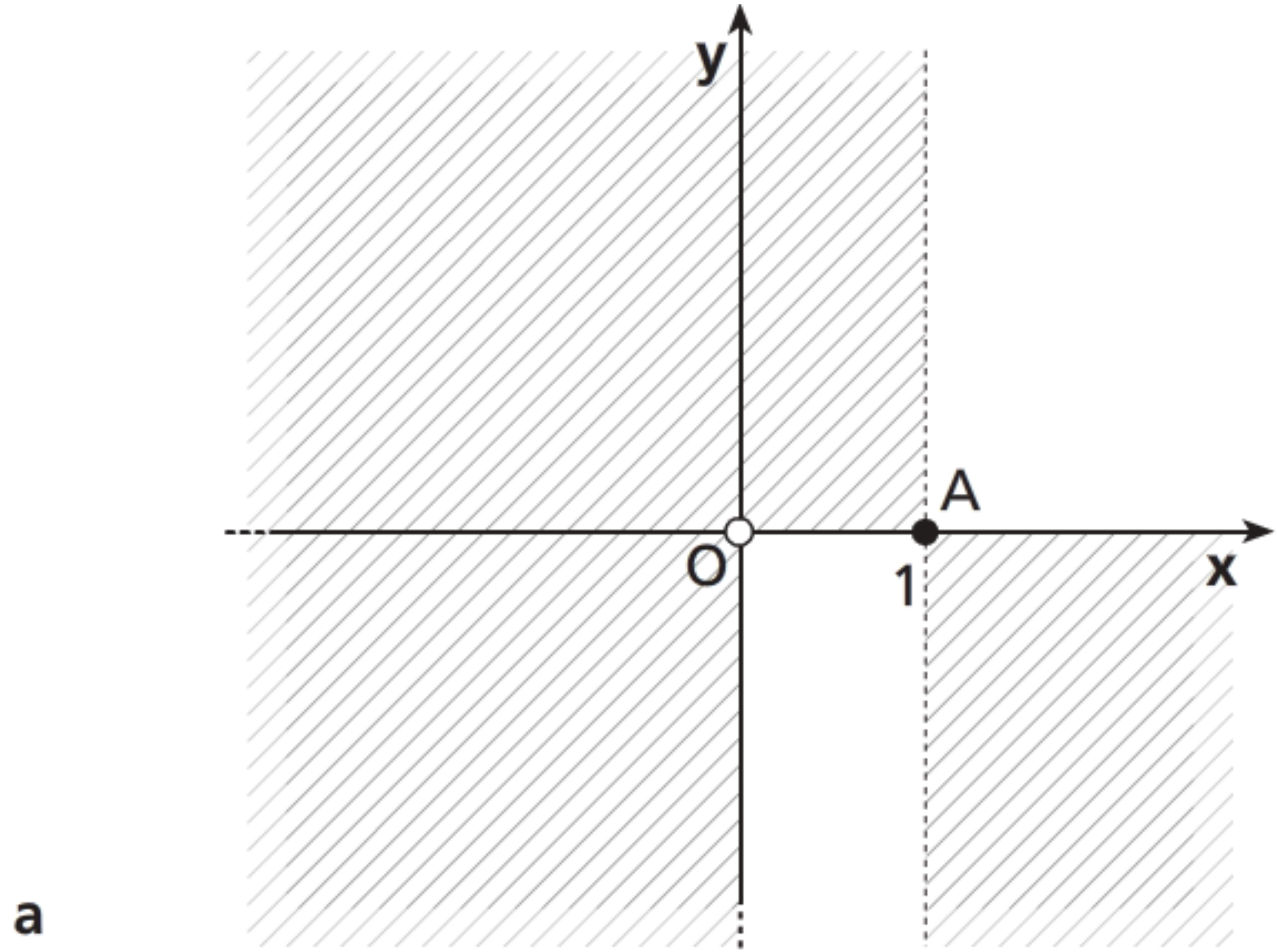
   $$\begin{cases} y = x^2 \cdot \ln x \\ y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 \cdot \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \to$$ il punto di intersezione con l'asse x è $A(1; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione:

$$x^2 \cdot \ln x > 0.$$

Primo fattore: $x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0.$
Secondo fattore: $\ln x > 0$ per $x > 1.$
Si ha $y > 0$ per $x > 1.$

Rappresentiamo le informazioni finora ottenute nel riferimento cartesiano (figura *a*).



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio.

- $\lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot \ln x$.

Tale limite presenta una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$ eliminabile riscrivendo l'espressione come quoziente e applicando la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2x}{x^4}} = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot \ln x = +\infty.$

  Poiché

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty,$$

  non esiste un asintoto obliquo.

6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi della funzione:

$$y' = 2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^2 = 2x \cdot \ln x + x = x \cdot (2 \ln x + 1).$$

$y' = 0$ se $x(2 \ln x + 1) = 0$. Si ha:

$x = 0$ non accettabile;

$$2 \ln x + 1 = 0 \rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ è l'unico punto stazionario.

$$y' > 0 \quad \rightarrow \quad x \cdot (2\ln x + 1) > 0.$$

Il primo fattore è positivo per $x > 0$.

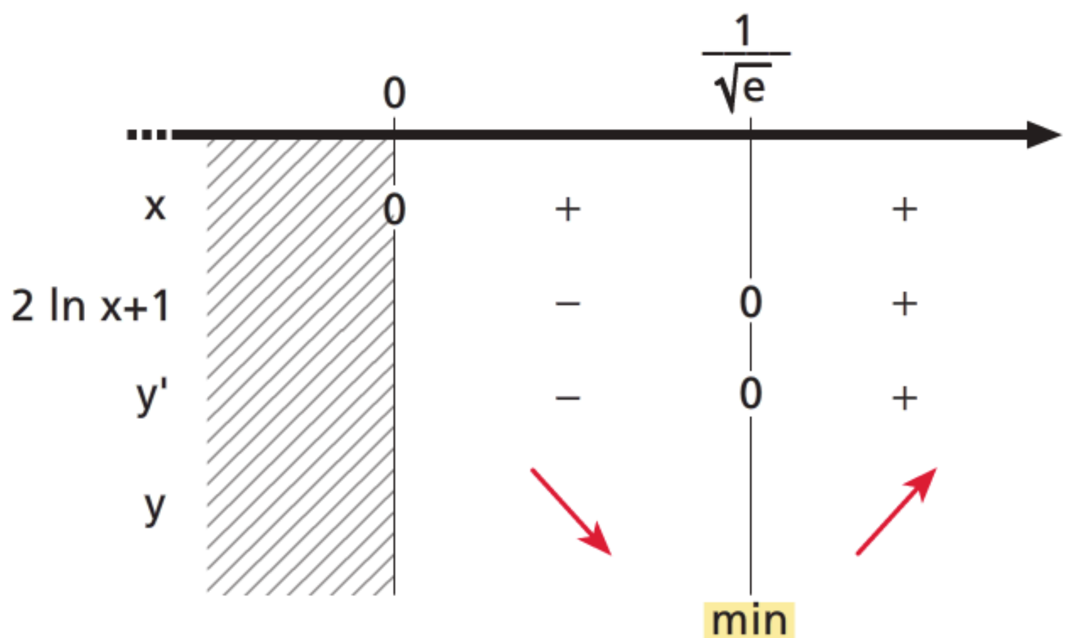
Secondo fattore:

$$2\ln x + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Compiliamo il quadro relativo al segno della derivata prima (figura *b*).

Per $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ si ha un punto di minimo:

$$B\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; -\frac{1}{2e}\right).$$



b

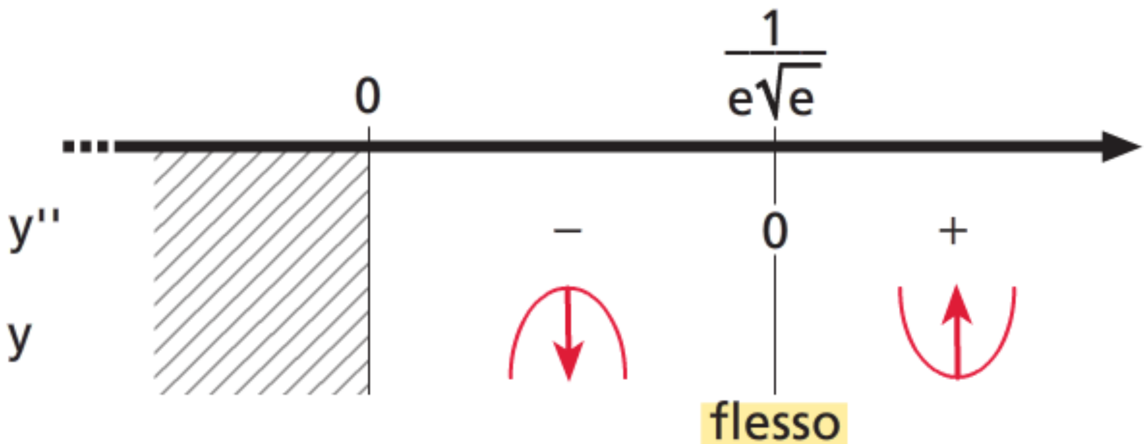
Calcoliamo la derivata seconda:

$$y'' = 2\ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3;$$

$$y'' > 0 \;\rightarrow\; 2\ln x + 3 > 0 \;\rightarrow\; \ln x > -\frac{3}{2} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x > e^{-\frac{3}{2}} \;\rightarrow\; x > \frac{1}{e\sqrt{e}}.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura *c*).



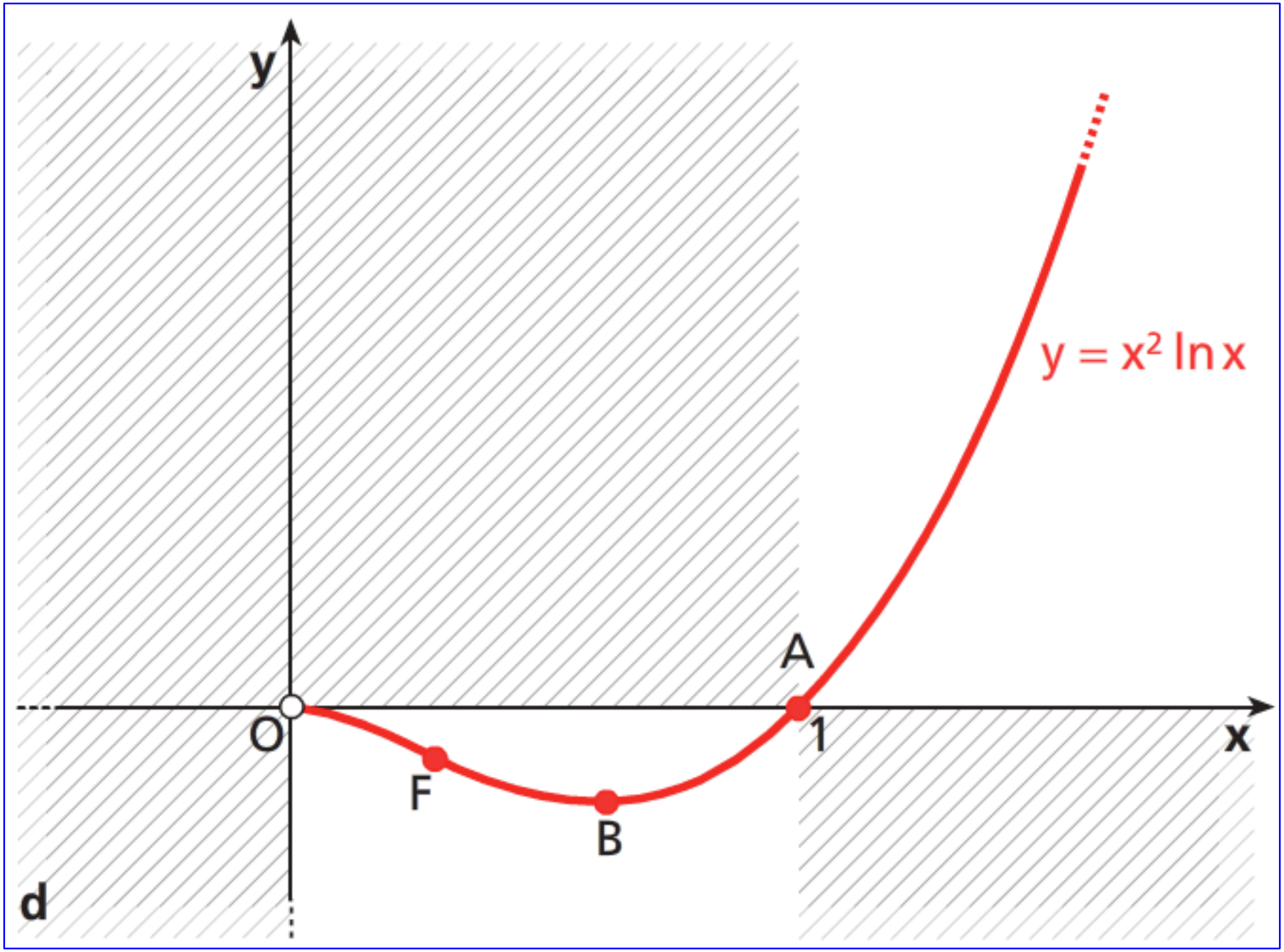
c

Essendo:

$$f\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)^2 \ln \frac{1}{e\sqrt{e}} =$$

$$= \frac{1}{e^3} \ln \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{e^3}\left(-\frac{3}{2}\ln e\right) = -\frac{3}{2e^3},$$

il punto di flesso è $F\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}; -\frac{3}{2e^3}\right)$.



y
x
O
1
A
F
B
$y = x^2 \ln x$
d

$$f(x) = \frac{\ln x}{3\ln x - 1}$$

1) Dominio:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3\ln x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq e^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$D = \left(0; \sqrt[3]{e}\right) \cup \left(\sqrt[3]{e}; +\infty\right)$$

2) Simmetrie:

$$f(-x) = \frac{\ln(-x)}{3\ln(-x) - 1}$$

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

f(x) non è ne pari ne dispari.

3) Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (1;0) \in f(x)$$

4) Segno:

$$N > 0 \rightarrow \ln x > 0 \rightarrow x > 1$$

$$D > 0 \rightarrow 3\ln x - 1 > 0 \rightarrow x > e^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \rightarrow (0;1) \cup \left(\sqrt[3]{e}; +\infty\right) \\ f(x) < 0 \rightarrow \left(1; \sqrt[3]{e}\right) \end{cases}$$

5) Limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to \sqrt[3]{e}} f(x) = \infty$$

x=e^(1/3) è un asintoto verticale per f(x).

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$$

y=1/3 è un asintoto orizzontale per f(x).

6) Derivate:

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(3\ln x - 1) - \ln x \cdot \frac{3}{x}}{(3\ln x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(3\ln x - 3\ln x - 1)}{(3\ln x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x(3\ln x - 1)^2}$$

Studiamone il segno:

$$f'(x) < 0 \; \forall x \in D$$

La funzione è sempre decrescente. Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{(3\ln x - 1)^2 + 2x(3\ln x - 1) \cdot \frac{3}{x}}{x^2(3\ln x - 1)^4}$$

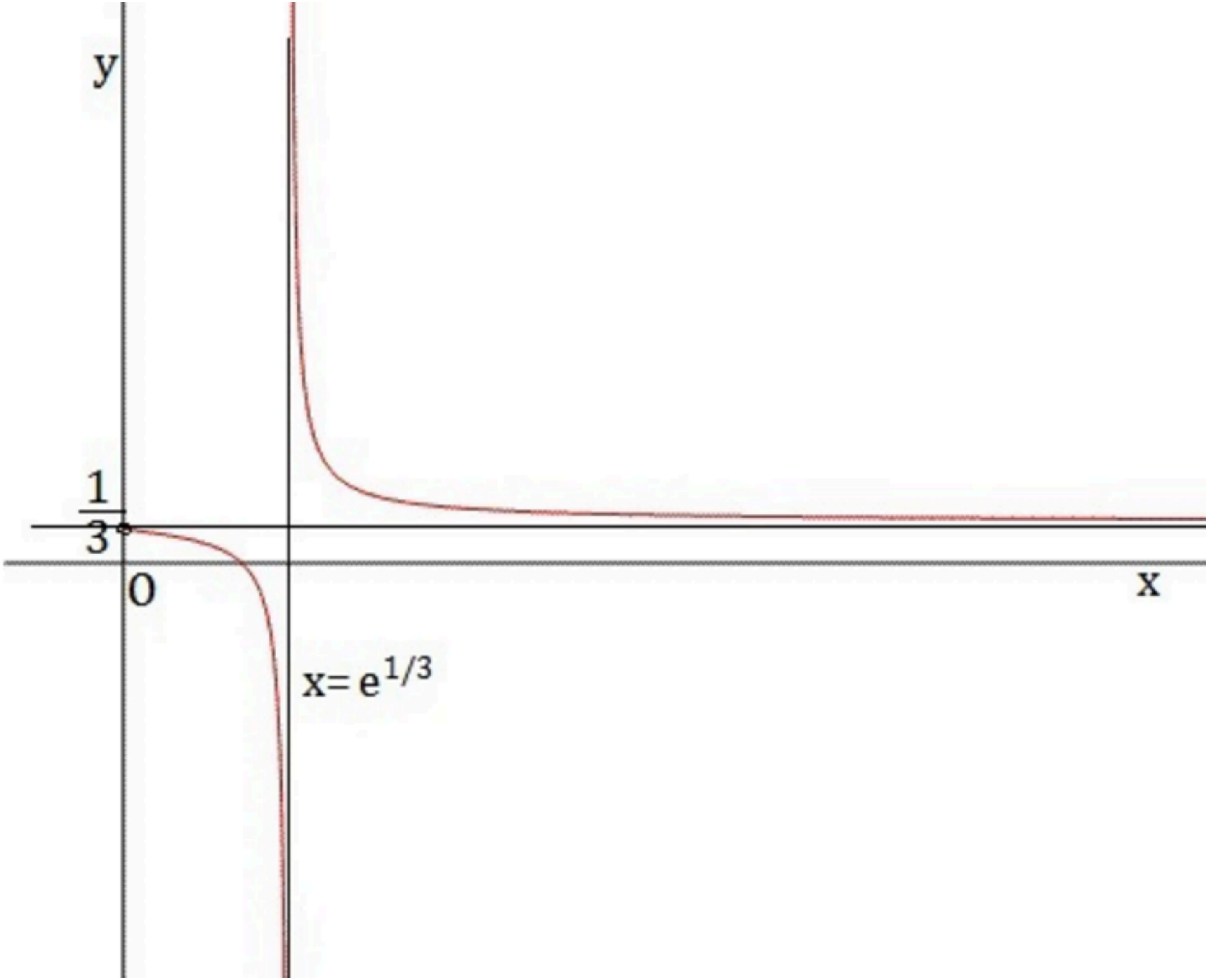
$$f''(x) = \frac{(3\ln x - 1)(3\ln x + 5)}{x^2(3\ln x - 1)^4}$$

$$F_1 > 0 \rightarrow x > e^{\frac{1}{3}}$$

$$F_2 \geq 0 \rightarrow x \geq e^{-\frac{5}{3}}$$

La funzione è quindi convessa tra x=0 e x=e^(-5/3), e oltre x=e^(1/3). La funzione è invece concava tra x=e^(-5/3) e x=e^(1/3). Abbiamo un punto di flesso per

$$x_F = e^{-\frac{5}{3}}$$



y
$\frac{1}{3}$
O
x
$x = e^{1/3}$

Funzioni goniometriche

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \frac{2\,\text{sen}\,x - 1}{\cos^2 x - 1}, \quad \textbf{nell'intervallo } [0; 2\pi].$$

1. Determiniamo il dominio della funzione nell'intervallo indicato.

La funzione è fratta, quindi dobbiamo porre il denominatore diverso da 0:

$$\cos^2 x - 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \cos x \neq \pm 1 \quad \rightarrow \quad D\colon x \neq 0 \ \wedge \ x \neq \pi \ \wedge \ x \neq 2\pi.$$

2. Non studiamo se la funzione è pari o dispari, poiché ci limitiamo allo studio nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

3. Cerchiamo soltanto le intersezioni con l'asse delle ascisse perché quella con l'asse delle ordinate $x = 0$ è esclusa dal dominio.

   Asse x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2\operatorname{sen} x - 1}{\cos^2 x - 1} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6},\ x = \dfrac{5}{6}\pi \\ y = 0 \end{cases}$$

   I punti di intersezione con l'asse x sono:

$$A\left(\frac{\pi}{6}; 0\right), \quad B\left(\frac{5}{6}\pi; 0\right).$$

4. Studiamo il segno della funzione:

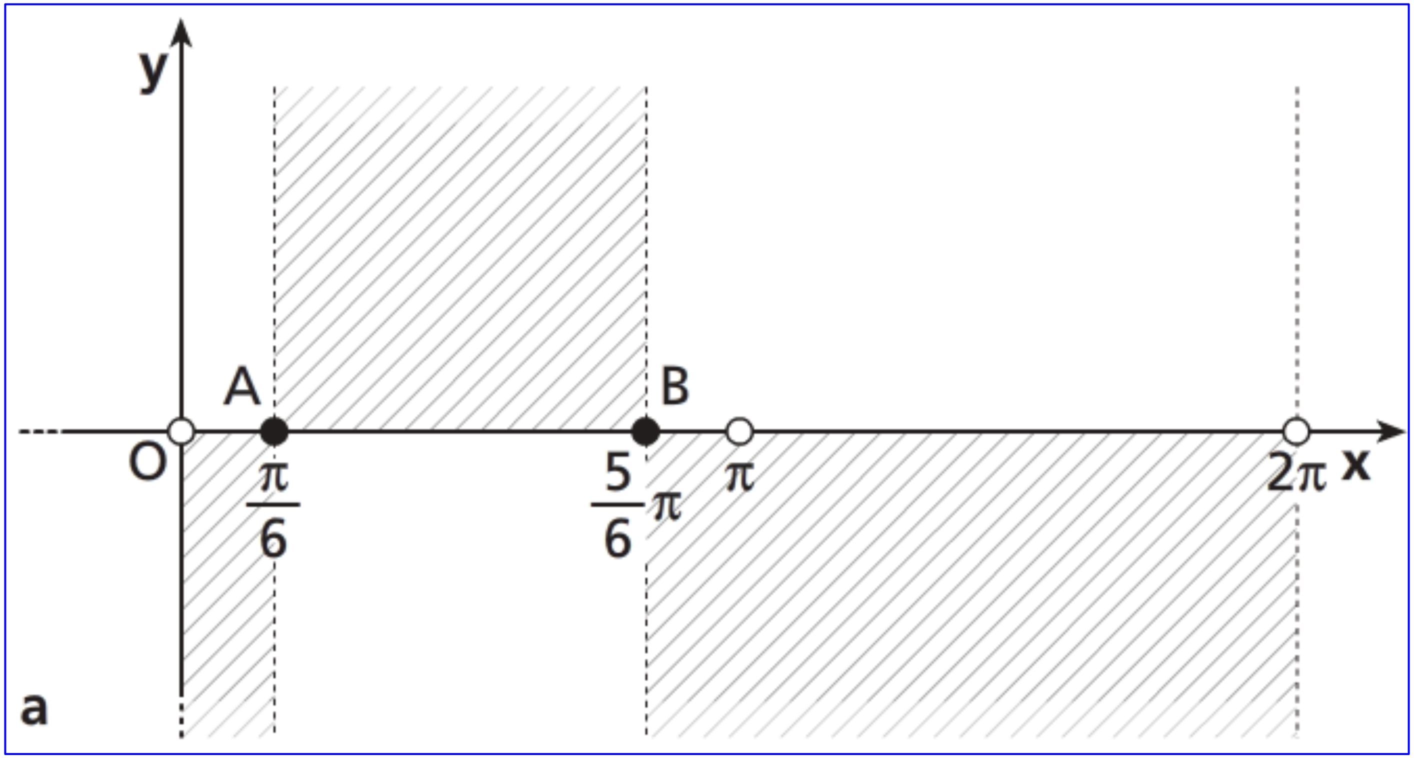
$$\frac{2\operatorname{sen} x - 1}{\cos^2 x - 1} > 0;$$

$$N > 0 \ \rightarrow \ 2\operatorname{sen} x - 1 > 0 \ \rightarrow \ \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi;$$

$$D > 0 \ \rightarrow \ \cos^2 x - 1 > 0 \ \rightarrow \ \text{nessun valore di } x.$$

   La funzione è positiva quando il numeratore è negativo, ossia per:

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \ \vee \ \frac{5}{6}\pi < x < \pi \ \vee \ \pi < x < 2\pi.$$



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\,\mathrm{sen}\,x - 1}{\cos^2 x - 1} = +\infty, \quad \lim_{x\to \pi^{\mp}} \frac{2\,\mathrm{sen}\,x - 1}{\cos^2 x - 1} = +\infty, \quad \lim_{x\to 2\pi^-} \frac{2\,\mathrm{sen}\,x - 1}{\cos^2 x - 1} = +\infty.$$

Siamo in presenza di tre asintoti verticali: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi della funzione:

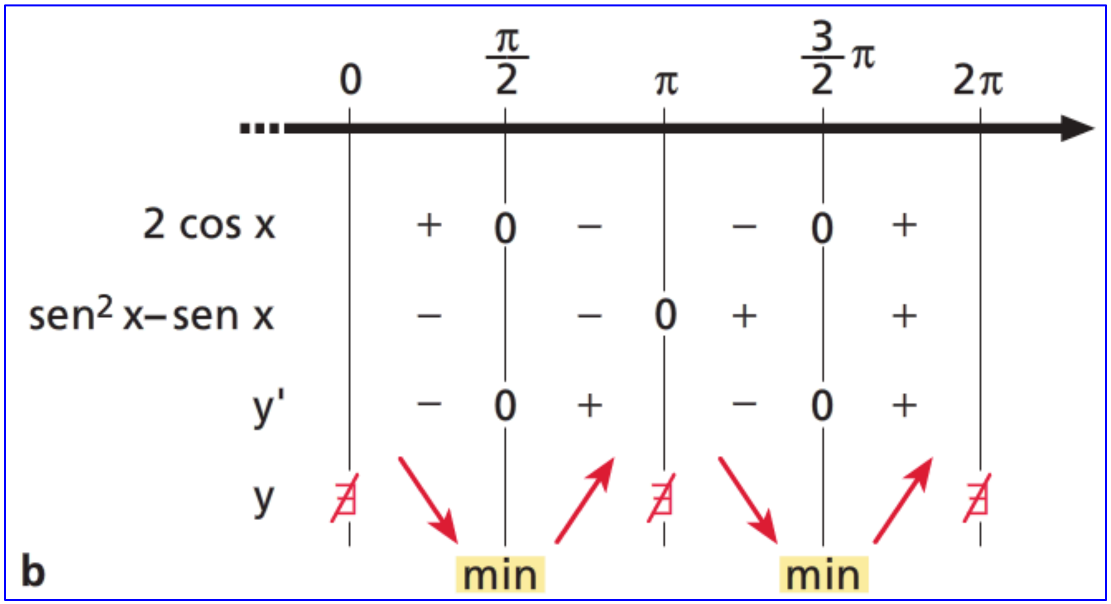
$$y' = \frac{2\cos x \cdot (\cos^2 x - 1) + 2\cos x\,\mathrm{sen}\,x \cdot (2\,\mathrm{sen}\,x - 1)}{(\cos^2 x - 1)^2} = \frac{2\cos x \cdot (\cos^2 x - 1 + 2\,\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\,x)}{(\cos^2 x - 1)^2};$$

$$y' = \frac{2\cos x \cdot (\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\,x)}{(\cos^2 x - 1)^2};$$

$$y' > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2\cos x \cdot (\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x)}{(\cos^2 x - 1)^2} > 0.$$

Poiché il denominatore è positivo per ogni valore del dominio, il segno della derivata prima è quello del numeratore.

Primo fattore: $2\cos x > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi.$



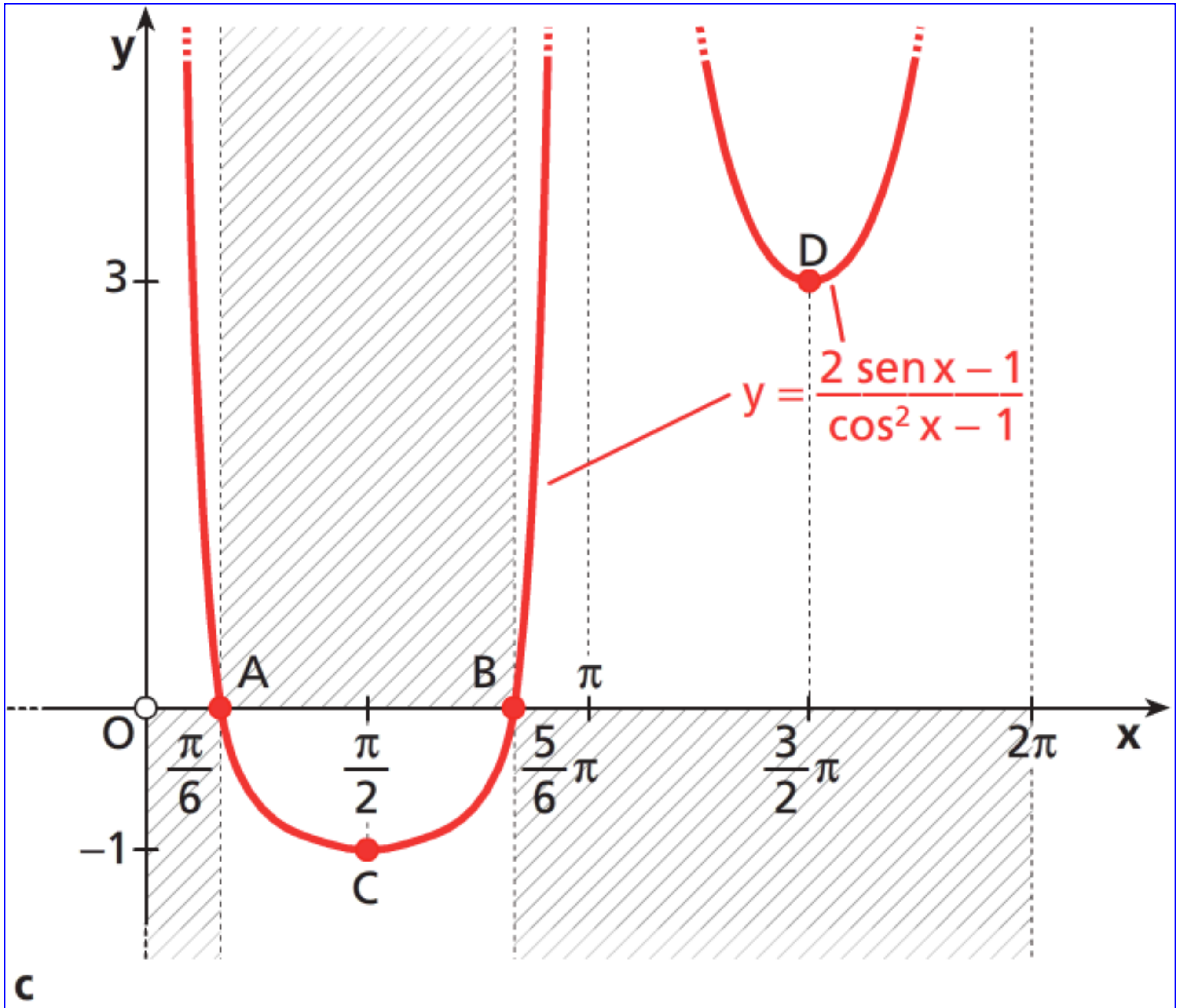
Per $x = \frac{\pi}{2}$ si ha un punto di minimo di coordinate:

$$C\left(\frac{\pi}{2}; -1\right).$$

Anche per $x = \frac{3}{2}\pi$ si ha un punto di minimo di coordinate:

$$D\left(\frac{3}{2}\pi; 3\right).$$

Il calcolo della derivata seconda si presenta piuttosto laborioso. Per questo cerchiamo di evitarlo, rappresentando il grafico possibile della funzione con le informazioni che abbiamo (figura *c*).



y
x
3
−1
O
A
B
C
D
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{5}{6}\pi$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π
$y = \frac{2 \operatorname{sen} x - 1}{\cos^2 x - 1}$
c

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos x} \qquad \text{IN } [0; 2\pi]$$

1) DOMINIO:

$1 - \cos x \neq 0 \rightarrow \cos x \neq 1 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \end{cases}$ $\quad \mathbb{D} = (0; 2\pi)$

2) INT. CON GLI ASSI:

$x = 0 \notin f(x)$, $f(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$

$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \in f(x)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right) \in f(x)$

3) SEGNO:

$f(x)>0 \qquad N>0 \rightarrow \cos x > 0 \rightarrow \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$

$D>0 \rightarrow \cos x < 1 \quad \forall x \in D$

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{2}\pi$		2π
N		+		−		+	
D		+		+		+	
$f(x)$		+		−		+	

4) LIMITI:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 2\pi^-} f(x) = +\infty \rightarrow \underline{x=0}, \ \underline{x=2\pi}$$

ASINTOTI VERTICALI

5) DERIVATE:

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x\,(1-\cos x) - \cos x \operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2} = \frac{-\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2}$$

$f'(x) \geq 0 \rightarrow -\operatorname{sen} x \geq 0$

$\rightarrow \operatorname{sen} x \leq 0 \rightarrow [\pi; 2\pi]$

$f(\pi) = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(\pi, -\frac{1}{2}\right)$ MIN

$$f''(x) = \frac{-\cos x(1+\cos^2 x - 2\cos x) + \sin x(2)(1-\cos x)\sin x}{(1-\cos x)^4}$$

$$f"(x) = \frac{\cos^3 x - 3\cos x + 2}{(1-\cos x)^4}$$

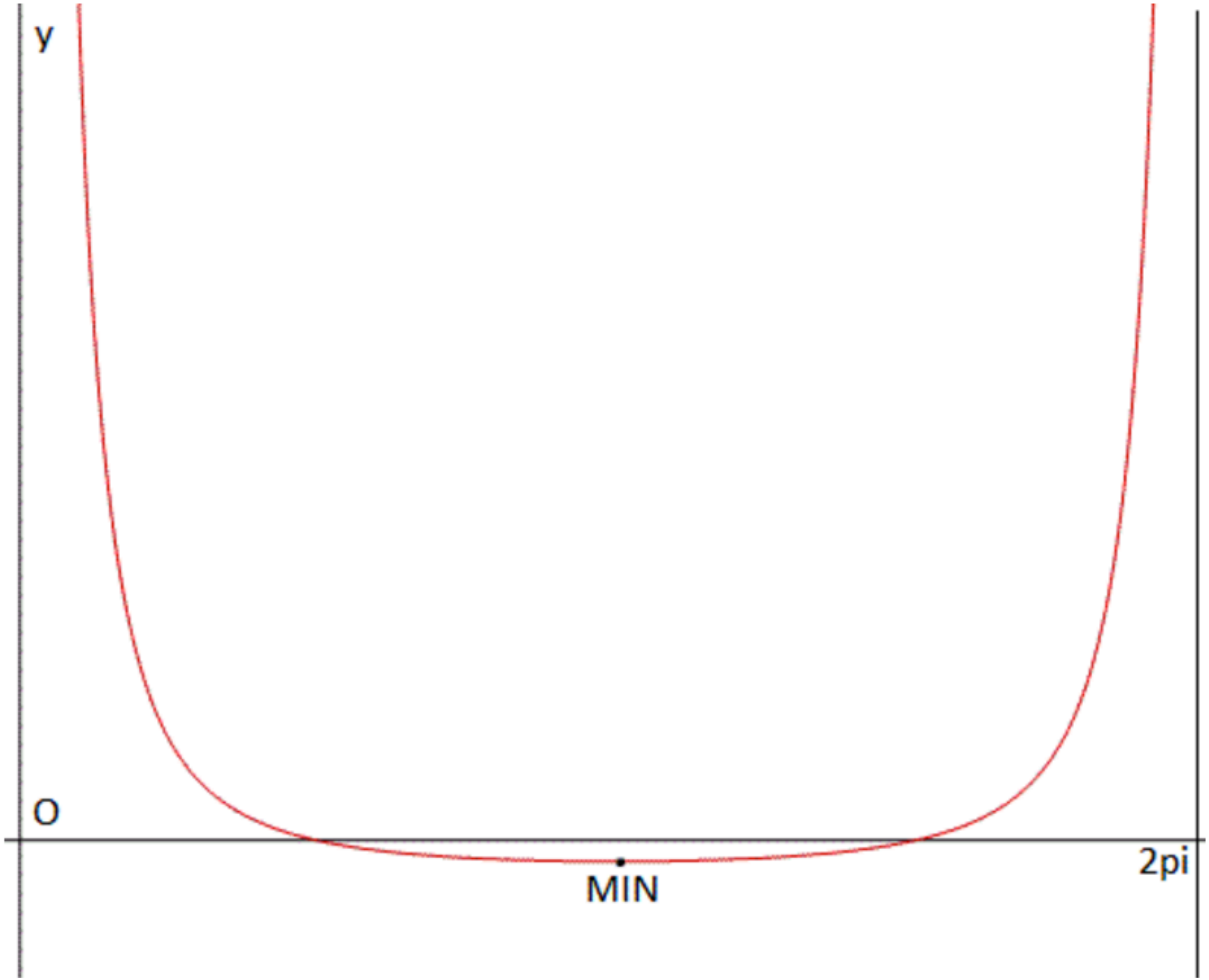
$$f"(x) \geq 0 \rightarrow \cos^3 x - 3\cos x + 2 \geq 0$$

$$f"(x) \geq 0 \rightarrow \cos^3 x - 3\cos x + 2 \geq 0$$

$$f"(x) \geq 0 \rightarrow (\cos x - 1)^2 (\cos x + 2) \geq 0\ ,\ con\ \ \cos x \neq 1$$

$$f"(x) \geq 0\ \forall x \in D$$

Segue che la disequazione è sempre verificata in D, di conseguenza la f"(x) è sempre positiva e la funzione sempre convessa.


y
O
MIN
2pi

Funzioni goniometriche inversa

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione: $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

1. Determiniamo il dominio della funzione. Poiché il denominatore $1 + x^2$ è non nullo per ogni x reale:

   D: $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

   $$f(-x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = f(x).$$

   Poiché $f(-x) = f(x)$, la funzione è pari. Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

   $$f(-x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = f(x).$$

   Poiché $f(-x) = f(x)$, la funzione è pari. Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

Asse y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \operatorname{arctg} 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Asse x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \pm 1 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse y è $A\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$; i punti di intersezione con l'asse x sono $B(-1; 0)$ e $C(1; 0)$.

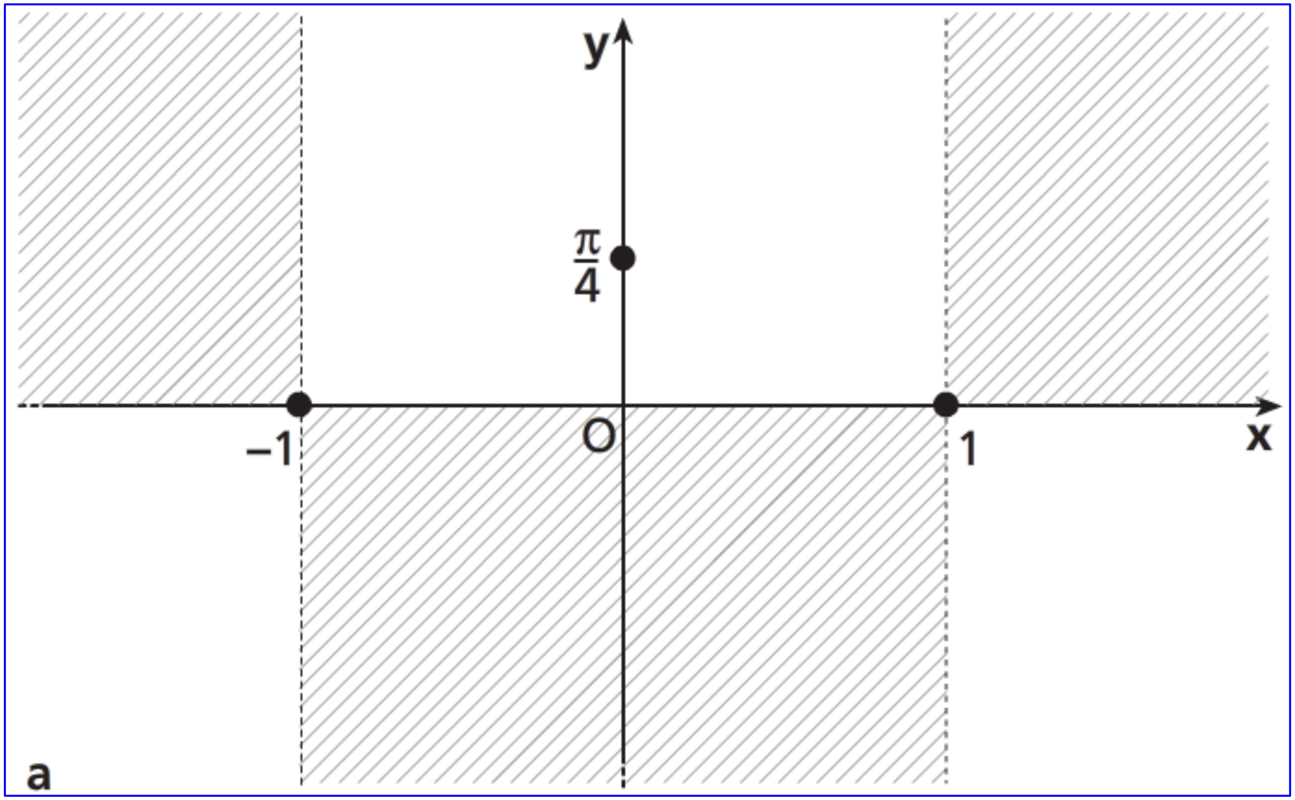
4. Studiamo il segno della funzione:

$$\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0$$

$$1 - x^2 > 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 1$$

$$1 + x^2 > 0 \quad \text{per} \quad \text{ogni } x.$$

La funzione ha quindi lo stesso segno di $1 - x^2$.



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad \to \quad y = -\frac{\pi}{4} \text{ è un asintoto orizzontale.}$$

6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi:

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+(1-x^2)^2} \cdot \frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{-4x}{1+x^4+2x^2+1+x^4-2x^2} = \frac{-4x}{2x^4+2} = \frac{-2x}{x^4+1}.$$

Per $x < 0$ la funzione è crescente e per $x > 0$ la funzione è decrescente.

La funzione ammette un massimo in $M\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Calcoliamo la derivata seconda:

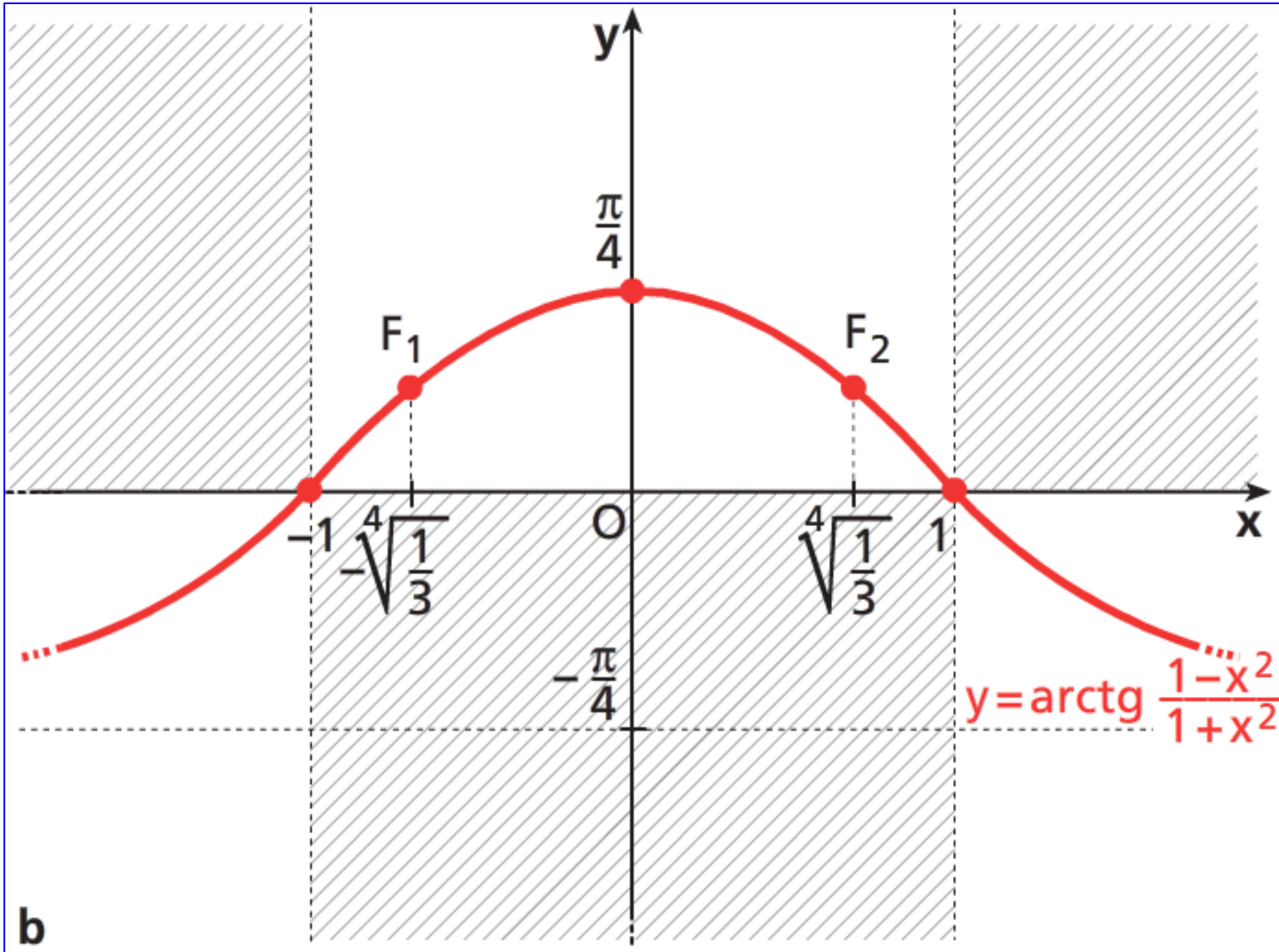
$$y'' = -2\frac{1(x^4+1) - x\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} = -2\frac{x^4+1-4x^4}{(x^4+1)^2} = -2\frac{-3x^4+1}{(x^4+1)^2} = \frac{6x^4-2}{(x^4+1)^2}$$

$$y'' > 0 \quad \text{per} \quad x < -\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \vee x > \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

$$y'' < 0 \quad \text{per} \quad -\sqrt[4]{\frac{1}{3}} < x < \sqrt[4]{\frac{1}{3}}.$$

In $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ ci sono due punti di flesso:

$$F_{1,2}\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}; \frac{\pi}{12}\right).$$


y
x
O
$\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{4}$
F_1
F_2
-1
1
$-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$
$y = \text{arctg}\,\frac{1-x^2}{1+x^2}$
b

$$f(x) = \arcsen\sqrt{1-x^3}$$

1) DOMINIO:
$$\begin{cases} -1 \leq \sqrt{1-x^3} \leq 1 \rightarrow \sqrt{1-x^3} \leq 1 \\ 1-x^3 \geq 0 \longrightarrow x^3 \leq 1 \rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-x^3 \leq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \rightarrow \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\mathbb{D} = [0;1]$$

2) SIMMETRIE: $f(-x)$ $\neq f(x) \rightarrow$ NO PARI

$\neq -f(x) \rightarrow$ NO DISPARI

3) INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \underline{\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \in f(x)}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \arcsin\sqrt{1-x^3} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 1-x^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \underline{(1; 0) \in f(x)}$$

4) SEGNO: $f(x) \geq 0$

$$\arcsin\sqrt{1-x^3} \geq 0 \rightarrow 0 \leq \sqrt{1-x^3} \leq 1 \rightarrow \forall x \in D$$

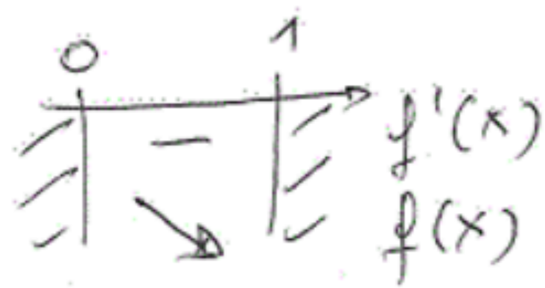
$$\underline{f(x) \geq 0 \ \forall x \in D}$$

5) LIMITI: NO DISCONTINUITÀ IN $D \rightarrow$ NO LIMITI!

6) <u>DERIVATE</u>:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^3}\right)\right) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-x^6}}$$

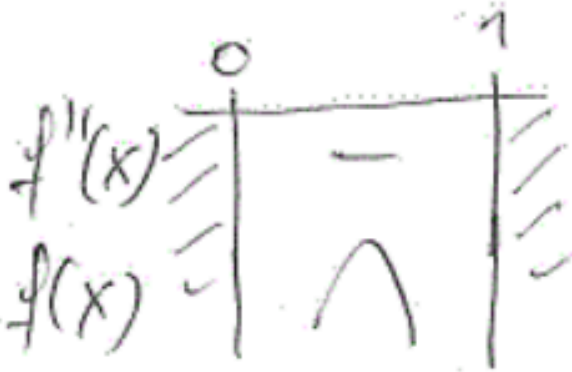
$$f'(x) \geq 0 \rightarrow \nexists\, x \in (0,1) \rightarrow$$



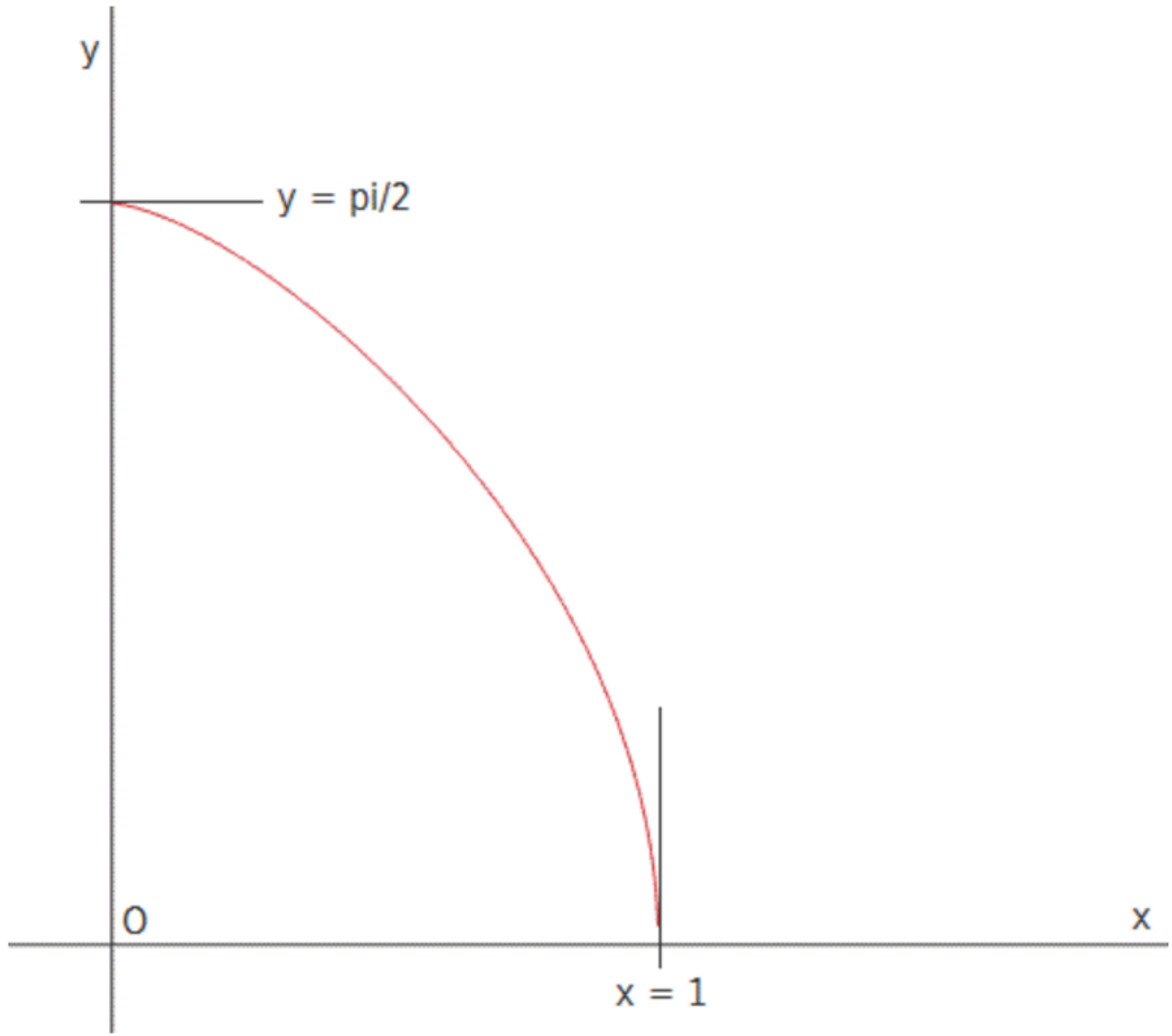
$\underline{\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{MAX}}$, $\underline{(1, 0) \text{ MIN}}$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-x^6}}\right) = \frac{3(2x^4+x)}{4(x^3-1)\sqrt{x^3-x^6}}$$

$$f''(x) \geq 0 \rightarrow -x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \rightarrow \underline{\nexists\, x \in D}$$



CONCAVITÀ VERSO IL BASSO IN $(0;1)$


y
y = pi/2
O
x
x = 1

Funzioni con valori assoluti

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \frac{x^2 - 1}{|x - 2| + 3x}.$$

Scriviamo la funzione come:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{4x-2} & \text{se } x \geq 2 \\ \dfrac{x^2-1}{2x+2} & \text{se } x < 2 \end{cases} \quad \to \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{4x-2} & \text{se } x \geq 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{se } x < 2 \wedge x \neq -1 \end{cases}$$

Studiamo $f_1(x) = \dfrac{x^2-1}{4x-2}$ ed evidenziamo poi, nel grafico, l'arco che si ottiene per $x \geq 2$.

1. Determiniamo il dominio di $y = \dfrac{x^2-1}{4x-2}$. Il denominatore deve essere non nullo, quindi:

$$D: x \neq \frac{1}{2}.$$

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

$$f_1(-x) = \frac{x^2-1}{-4x-2} \neq \pm f_1(x) \quad \to \text{ la funzione non è né pari né dispari.}$$

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

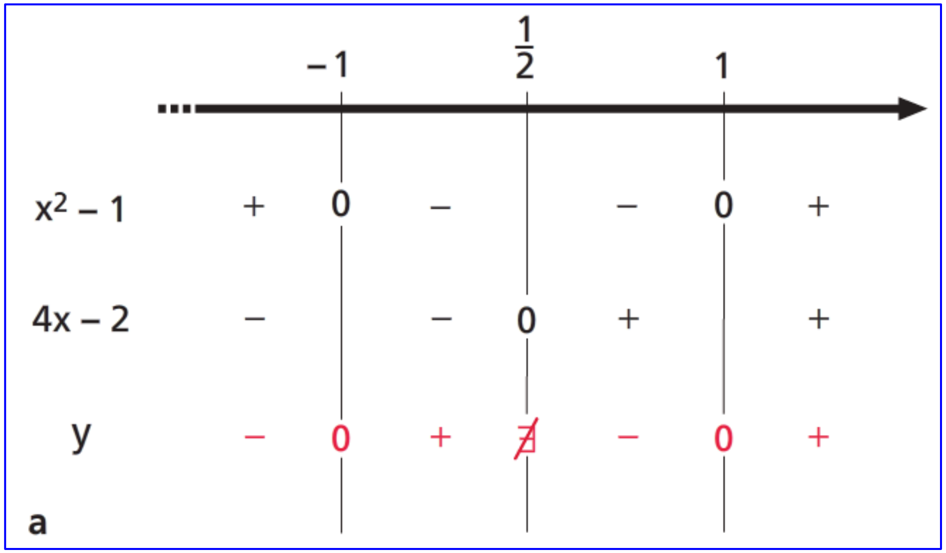
$$\text{Asse } y: \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Asse } x: \begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x^2 - 1}{4x - 2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \pm 1 \end{cases}$$

I punti di intersezione sono $A\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$, $B(-1; 0)$, $C(1; 0)$.

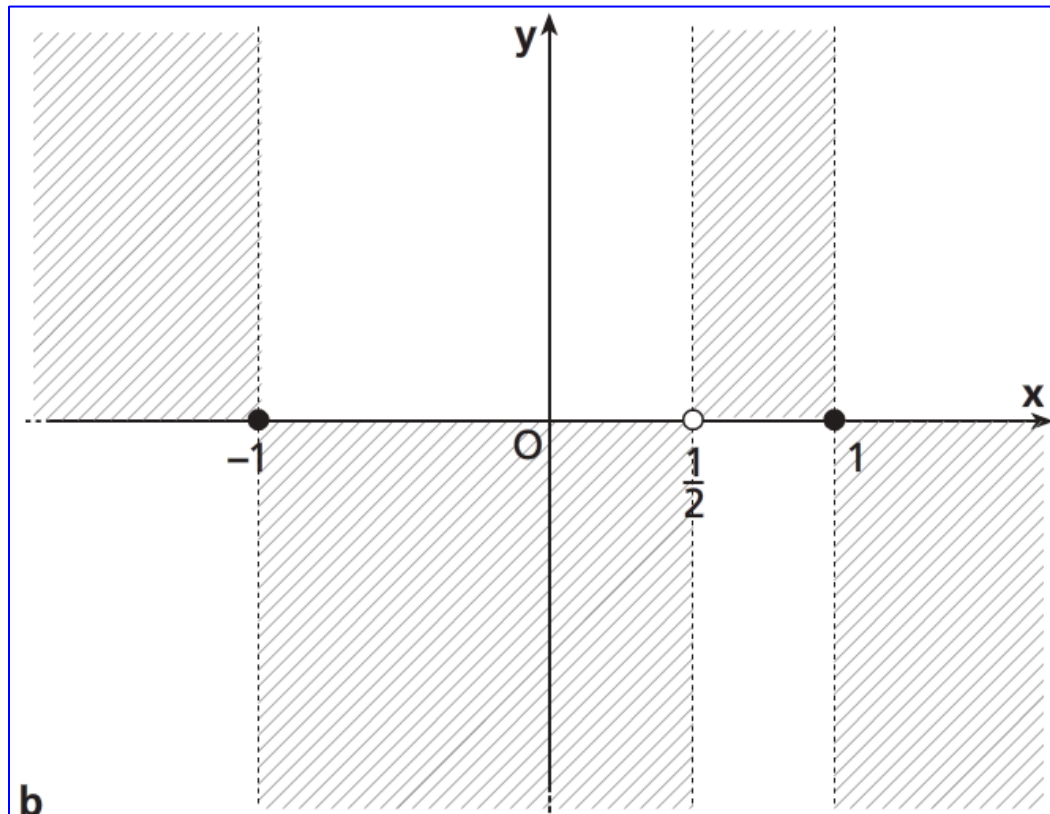
4. Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{x^2 - 1}{4x - 2} > 0 < \begin{matrix} x^2 - 1 > 0 \text{ per } x < -1 \vee x > 1 \\ 4x - 2 > 0 \text{ per } x > \dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura *a*).



-1
$\frac{1}{2}$
1
$x^2 - 1$
$4x - 2$
y
a



y
x
O
-1
$\frac{1}{2}$
1
b

5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty;$

  poiché il grado del numeratore supera di 1 quello del denominatore, esiste un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$.

  $$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4},$$

  $$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{4x - 2} - \frac{1}{4} x \right) =$$

  $$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 2 - 2x^2 + x}{4(2x - 1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - 2}{4(2x - 1)} = \frac{1}{8}.$$

L'asintoto obliquo ha equazione:

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}.$$

- $\lim_{x \to \frac{1}{2}^{\pm}} f(x) = \mp\infty \quad \to \quad x = \frac{1}{2}$ è un asintoto verticale.

6. Determiniamo eventuali massimi, minimi e flessi. Calcoliamo:

$$y' = \frac{2x(4x-2) - 4(x^2-1)}{(4x-2)^2} = \frac{8x^2 - 4x - 4x^2 + 4}{4(2x-1)^2} = \frac{4(x^2 - x + 1)}{4(2x-1)^2} = \frac{x^2 - x + 1}{(2x-1)^2}.$$

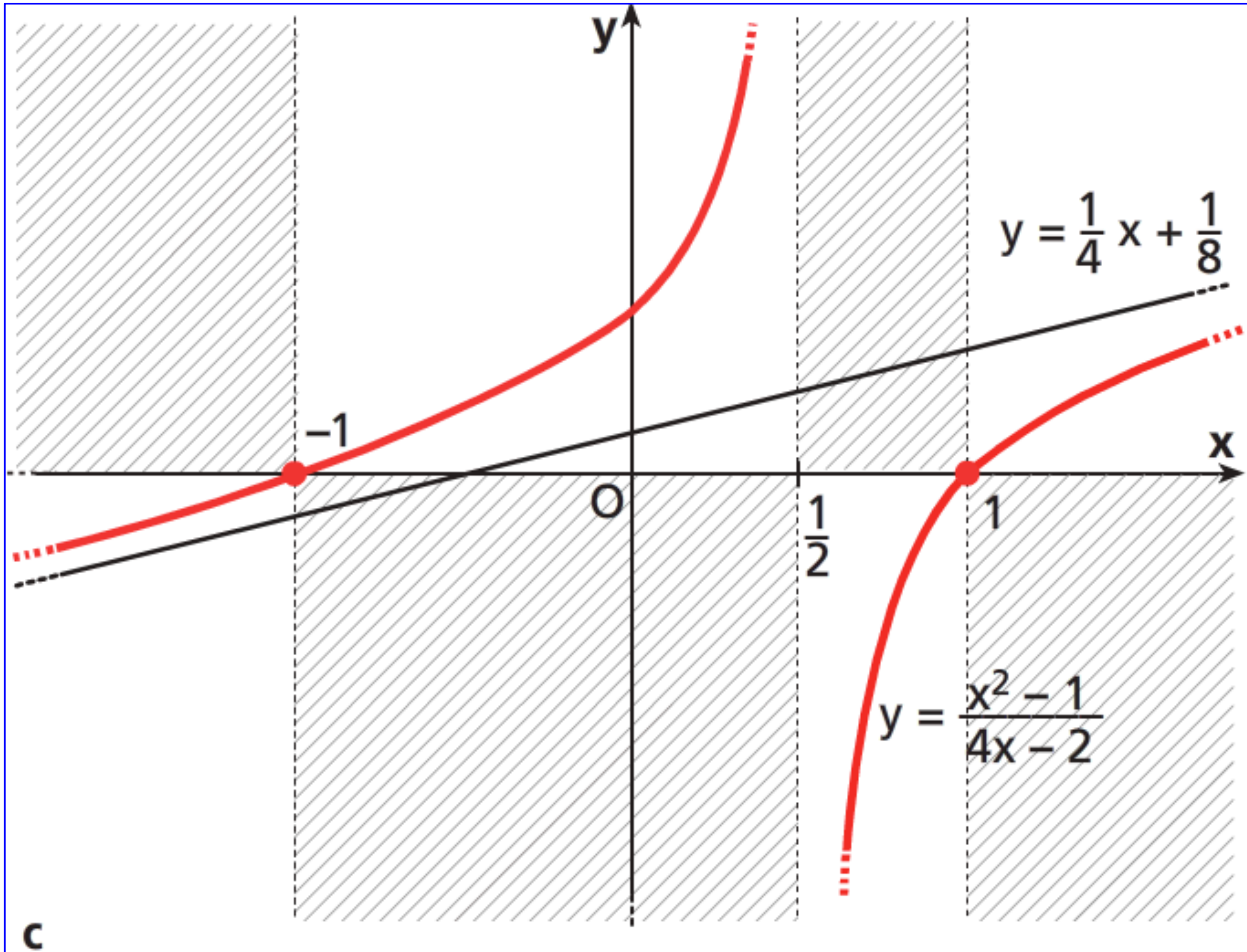
$y' > 0$ per ogni x del dominio, in quanto sia il numeratore che il denominatore sono sempre positivi. Quindi la funzione è sempre crescente in senso stretto e non presenta punti stazionari.
Calcoliamo la derivata seconda:

$$y'' = \frac{(2x-1)(2x-1)^2 - (x^2 - x + 1)4(2x-1)}{(2x-1)^4} = \frac{(2x-1)^2 - 4(x^2 - x + 1)}{(2x-1)^3} = \frac{-3}{(2x-1)^3}.$$

$y'' > 0$ per $x < \frac{1}{2}$ concavità verso l'alto;

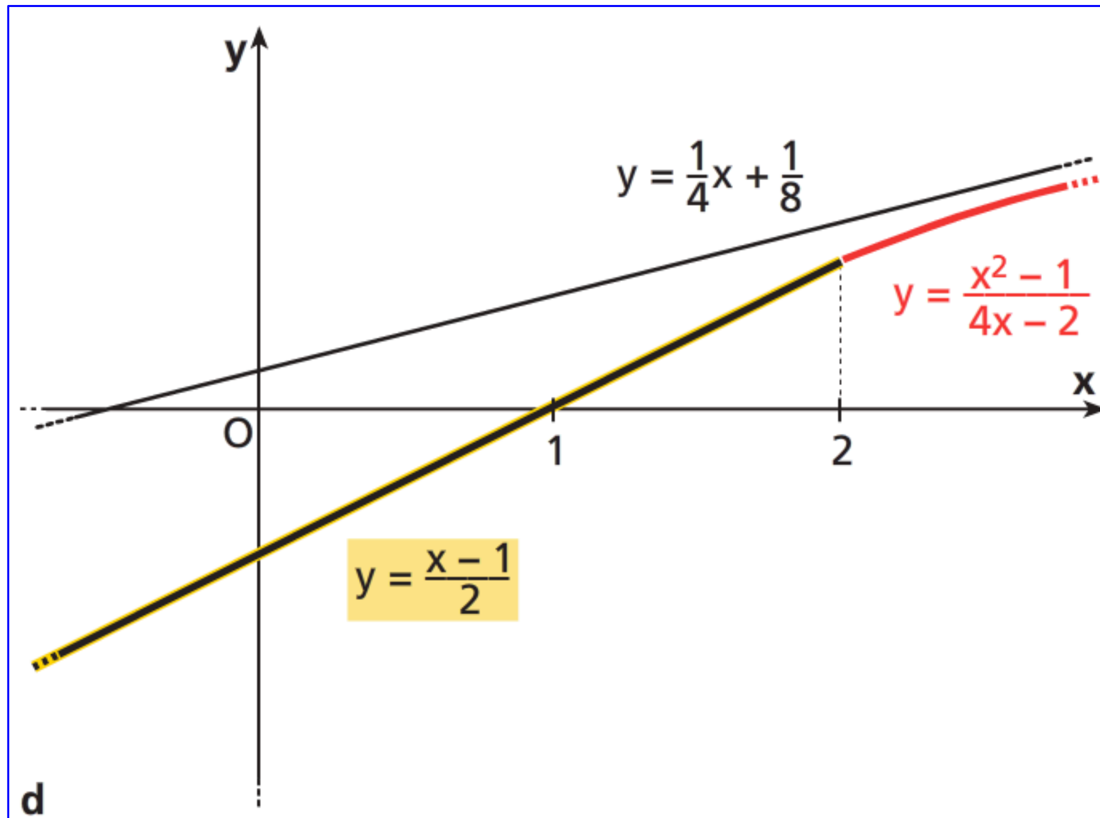
$y'' < 0$ per $x > \frac{1}{2}$ concavità verso il basso.

Tracciamo il grafico della funzione $y=\dfrac{x^2-1}{4x-2}$ e del suo asintoto obliquo (figura *c*).



Tracciamo il grafico completo della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 2| + 3x}$, considerando il grafico della figura *c* per $x \geq 2$ e disegnando il grafico della retta $y = \dfrac{x - 1}{2}$ per $x < 2 \wedge x \neq -1$ (figura *d*).

Quindi, la retta è privata del punto $(-1; -1)$.



$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - |x-2|}$$

$$|x-2| \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \to x \geq 2 \\ 2-x & \text{se } x-2 < 0 \to x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x + 2} \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 2} \\ x < 2 \end{cases}$$

1) DOMINIO:

$x^2 - x + 2 \neq 0 \quad (\Delta < 0)$

$D_1 = [2; +\infty)$

2) SIMMETRIE: NO!

3) INT. CON GLI ASSI:

$f(x) = 0 \to x = 0 \ (< 2)$ No

4) SEGNO:

$f(x) \geq 0$

$\left.\begin{array}{l} N \geq 0 \ \forall x \geq 2 \\ D > 0 \ \forall x \geq 2 \end{array}\right\} \dfrac{f(x) > 0}{\forall x \geq 2}$

$x^2 + x - 2 \neq 0 \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$

$D_2 = \{x : x < 2, x \neq 1 \vee x \neq -2\}$

$f(x) = 0 \to x = 0 \to (0,0) \in f(x)$

$f(x) \geq 0$

$N \geq 0 \ \forall x < 2$

$D > 0 \to x < -2 \vee x > 1$

x		-2		0		1		2	
$f(x)$	$+$		$-$	$\bullet$	$-$		$+$		$+$

$x \geq 2$

5) LIMITI:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$y = 1$ ASINTOTO ORIZZONT.

$x < 2$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

$y = 1$ ASINTOTO ORIZZONTALE

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \infty$$

$x = 1$, $x = -2$ ASINTOTI VERTICALI

6) DERIVATE:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-x+2)-x^2(2x-1)}{(x^2-x+2)^2}$$

$f'(x)\geq 0$

$2x^3-2x^2+4x-2x^3+x^2\geq 0$

$-x^2+4x\geq 0$

$$\begin{cases} x(-x+4)\geq 0 \\ x\geq 2 \end{cases} \qquad \underline{2\leq x\leq 4}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+x-2)-x^2(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$f'(x)\geq 0$

$2x^3+2x^2-4x-2x^3-x^2\geq 0$

$x^2-4x\geq 0$

$$\begin{cases} x(x-4)\geq 0 \\ x<2 \end{cases}$$

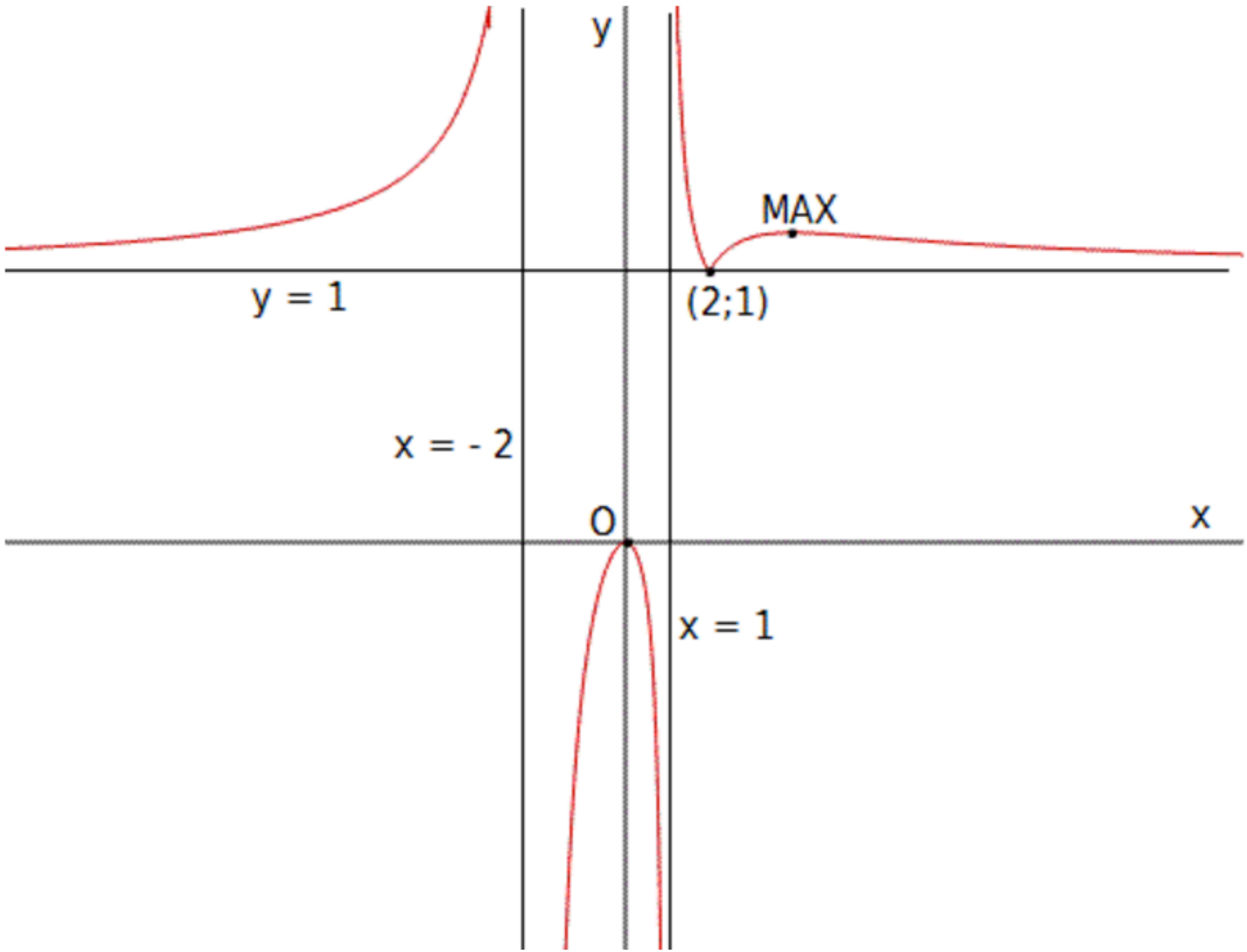
$\underline{x\leq 0}$

		0		2		4	
$f'(x)$	+		−		+		−
$f(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	P	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

$\underline{P(2;1)}$

PUNTO ANGOLOSO

$\underline{\text{MAX in } 0 \text{ e } (4;\tfrac{8}{7})}$



y
MAX
y = 1
(2;1)
x = - 2
O
x
x = 1

$$y = e^{\left|\frac{1}{1-x}-1\right|}$$

Iniziamo con il dominio:

Abbiamo un denominatore, dobbiamo richiedere che esso sia diverso da zero:

$$1 - x \neq 0 \iff x \neq 1$$

Il dominio è quindi:

$$\mathrm{dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Segno della funzione

La funzione è sempre positiva nel dominio, lo possiamo asserire perché la funzione è esponenziale.

Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\left|\frac{1}{1-x}-1\right|} = e$$

Abbiamo un asintoto orizzontale sinistro di equazione $y = e$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\left|\frac{1}{1-x}-1\right|} = e$$

$y = e$ è anche asintoto orizzontale sinistro. Non abbiamo asintoti obliqui.

$$\lim_{x \to 1^-} e^{\left|\frac{1}{1-x}-1\right|} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} e^{\left|\frac{1}{1-x}-1\right|} = +\infty$$

$x = 1$ è un asintoto verticale.

Per studiare la monotonia della funzione, dobbiamo calcolare prima la derivata prima. Ci conviene scrivere la funzione in modo diverso, utilizzando la definizione di valore assoluto. Cominciamo con lo studio del segno dell'argomento del valore assoluto.

$$\frac{1}{1-x} - 1 > 0 \iff \frac{1-1+x}{1-x} > 0 \iff \frac{x}{1-x} > 0$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore:

$$x > 0$$

$$1 - x > 0 \iff x < 1$$

Tabuliamo i segno:

\- - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + +

\+ + + + + + + + + 0 + + + +1 - - - -

\- - - - - - - - - - 0 + + + +1 - - - -

di conseguenza la funzione è:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{1-x}} & \text{se } 0 < x < 1 \\ e^{-\frac{x}{1-x}} & \text{se } x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$$

Possiamo calcolare la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{x}{1-x}}}{(x-1)^2} & \text{se } 0 < x < 1 \\ -\frac{e^{\frac{x}{1-x}}}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$$

Abbiamo dei dubbi di derivabilità nel punto 0:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{e^{-\frac{h}{1-h}} - 1}{h}$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $-(1-h)$ il denominatore:

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{e^{-\frac{h}{1-h}} - 1}{-(1-h)\frac{h}{-(1-h)}} =$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} -\frac{1}{1-h} \cdot \lim_{h \to 0^-} \frac{e^{\frac{h}{1-h}} - 1}{\frac{h}{-(1-h)}} = -1$$

mentre:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\frac{h}{1-h}} - 1}{h}$$

moltiplichiamo e dividiamo per $1-h$ il denominatore:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\frac{h}{1-h}} - 1}{(1-h)\frac{h}{(1-h)}} = 1$$

Il limite destro e il limite sinistro sono finiti ma non coincidono, quindi $x=0$ è un punto di non derivabilità. Abbiamo un punto angoloso.

Lo studio della derivata prima per i massimi e i minimi è immediato. Nota infatti che la derivata prima è positiva per $0<x<1$ mentre è negativa per x<0 o x>1, quindi la funzione è:

decrescente in $x<0 \vee x>1$
crescente in $0<x<1$

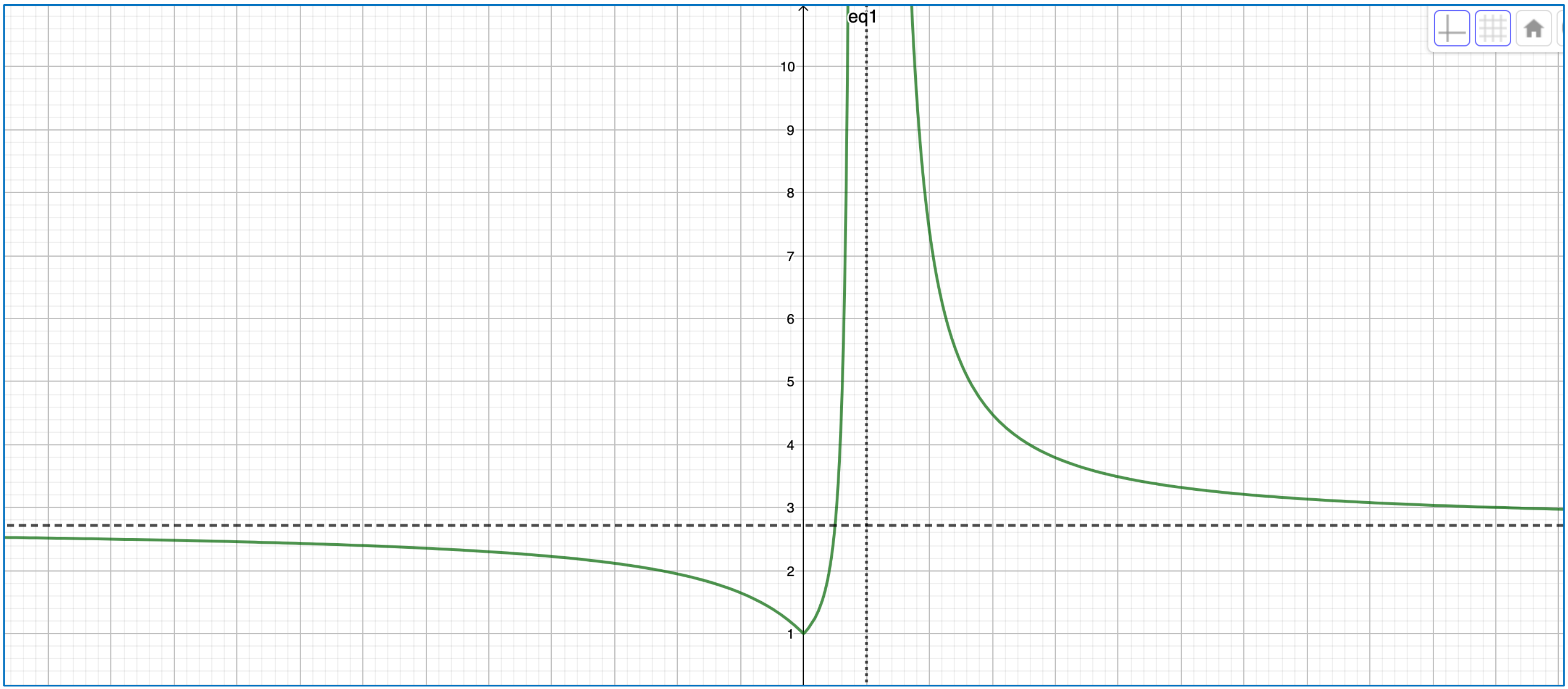
Per la convessità dobbiamo studiare la derivata seconda 🙂

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{x}{1-x}}(3-2x)}{(x-1)^4} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \\ \frac{e^{\frac{x}{1-x}}(2x-1)}{(x-1)^4} & \text{se } x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$$

Studiare il segno della derivata seconda è sempre tranquilla, questo perché per $0 < x < 1$ essa è positiva, quindi la funzione è convessa.

Per $x < 0$ la derivata seconda è negativa, quindi la funzione è concava.

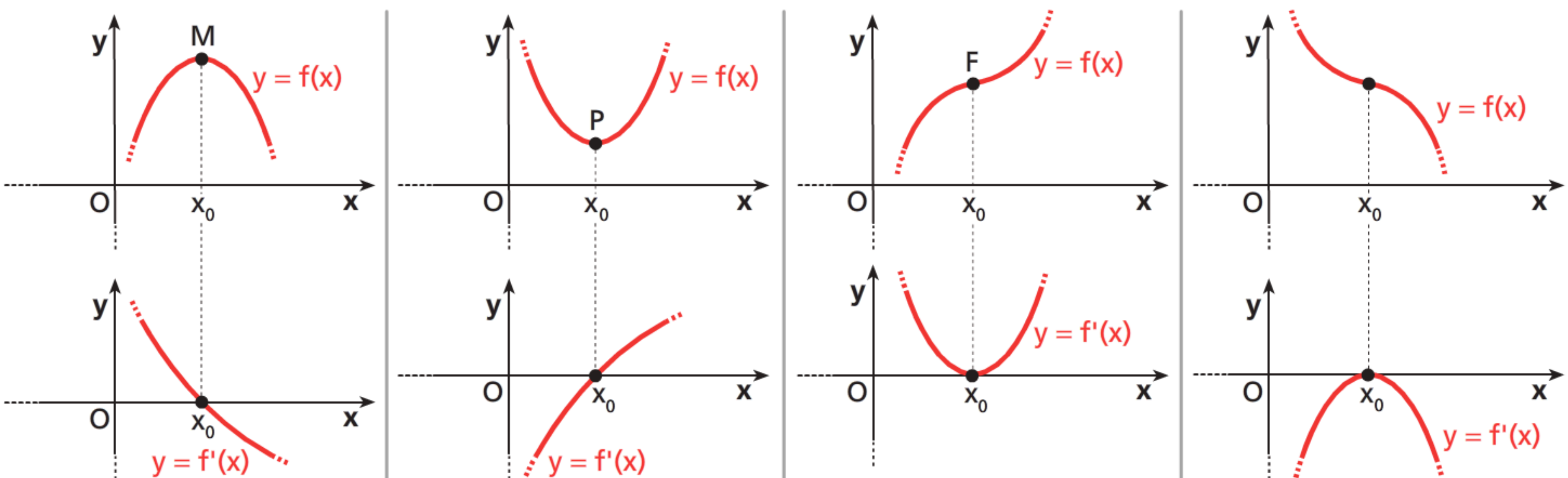
Per $x > 1$ la derivata seconda è positiva, quindi la funzione è convessa



eq1
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

I GRAFICI DI UNA FUNZIONE E DELLA SUA DERIVATA

Dato il grafico di una funzione $f(x)$, è possibile ricavare informazioni relative al grafico della funzione derivata $f'(x)$ e viceversa. In particolare, fra i due grafici esistono i collegamenti mostrati nella figura 5.



a. In x_0 la funzione $f(x)$ ha un massimo relativo. Nello stesso punto, la derivata $f'(x)$ è nulla e quindi il suo grafico interseca l'asse x in x_0. A sinistra di x_0 la derivata è positiva, a destra è negativa.

b. In x_0 la funzione $f(x)$ ha un minimo relativo: quindi $f'(x_0) = 0$.
Il grafico della derivata interseca l'asse x in x_0; a sinistra di x_0 la derivata è negativa, a destra è positiva.

c. In x_0 $f(x)$ ha un flesso orizzontale ascendente, quindi $f'(x_0) = 0$. Il grafico della derivata interseca l'asse x in x_0, e $f'(x)$ è positiva sia a destra sia a sinistra di x_0. Pertanto in x_0 c'è un minimo per $f'(x)$.

d. In x_0 $f(x)$ ha un flesso orizzontale discendente: con considerazioni analoghe al caso precedente, per $x \neq x_0$ $f'(x)$ è negativa.
Pertanto in x_0 c'è un massimo per $f'(x)$.

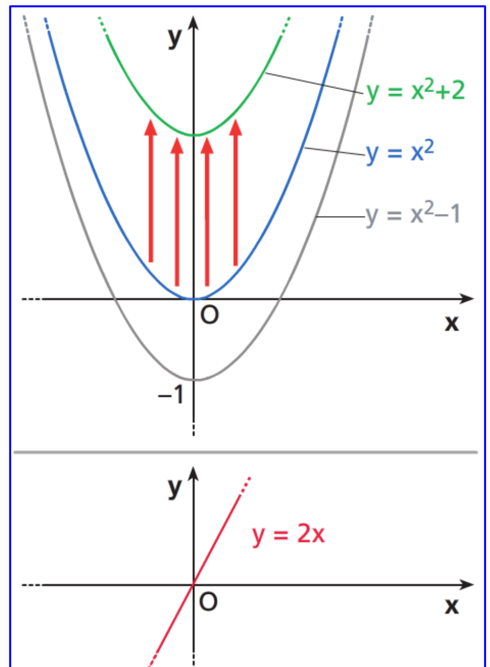
Per passare dal grafico di una funzione a quello della sua derivata consideriamo che:

- nei punti di massimo o di minimo della funzione $f(x)$ si ha $f'(x) = 0$;
- negli intervalli in cui la funzione $f(x)$ è crescente si ha $f'(x) > 0$ e negli intervalli in cui la funzione è decrescente si ha $f'(x) < 0$;
- nei punti di flesso si ha $f''(x) = 0$ e quindi $f'(x)$ ha la tangente orizzontale e può avere un massimo o un minimo.

Supponiamo, per semplicità, che $f'(x)$ e $f''(x)$ esistano nel dominio di $f(x)$.

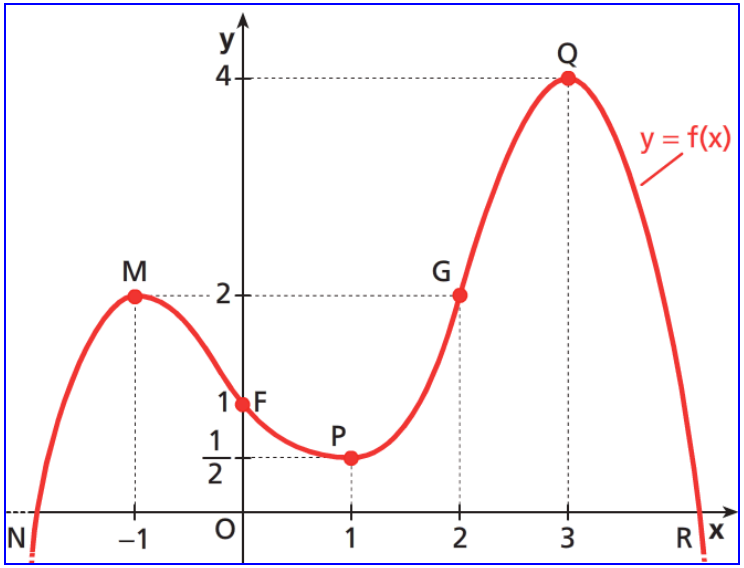
Dato il grafico di $f'(x)$, si possono ricavare informazioni sul grafico di $f(x)$, ma non è possibile disegnarlo univocamente. Infatti se $f'(x)$ è la derivata di $f(x)$, è anche la derivata di $f(x) + c$, dove c è una costante qualsiasi, in quanto la derivata di una costante è nulla. I grafici delle infinite funzioni che hanno come derivata $f'(x)$ sono traslati, l'uno rispetto all'altro, di un vettore parallelo all'asse y.

Per esempio, la funzione $y = 2x$ è la funzione derivata di $y = x^2$, ma anche di $y = x^2 + 2$, di $y = x^2 - 1$ e in generale di $y = x^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$.



ESERCIZIO GUIDA

Dato il grafico di $y = f(x)$ della figura a fianco, studiamo l'andamento del grafico della sua derivata $y = f'(x)$.



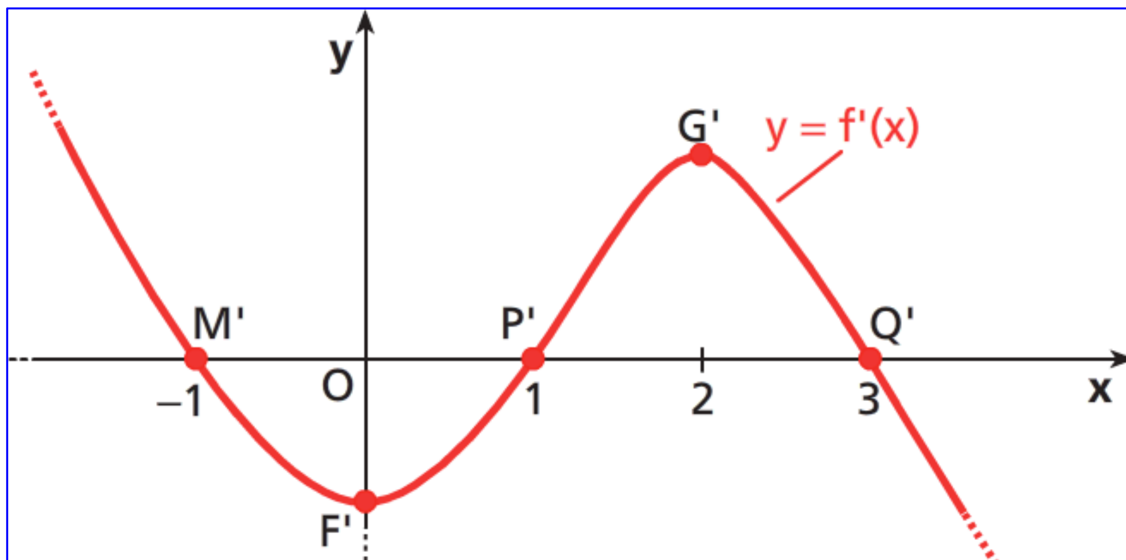
Per passare dal grafico di una funzione $f(x)$ a quello della sua derivata, supponendo che $f'(x)$ e $f''(x)$ esistano sempre, consideriamo che:

- nei punti di massimo o di minimo della funzione $f(x)$ si ha $f'(x) = 0$;
- negli intervalli in cui la funzione $f(x)$ è crescente si ha $f'(x) > 0$ e negli intervalli in cui la funzione è decrescente si ha $f'(x) < 0$;
- nei punti di flesso si ha $f''(x) = 0$ e quindi $f'(x)$ ha la tangente orizzontale e può avere un massimo o un minimo.

I punti M, P, Q, di ascisse rispettive -1, 1, 3, sono punti di massimo e minimo per $f(x)$, quindi $f'(x) = 0$ per $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$.

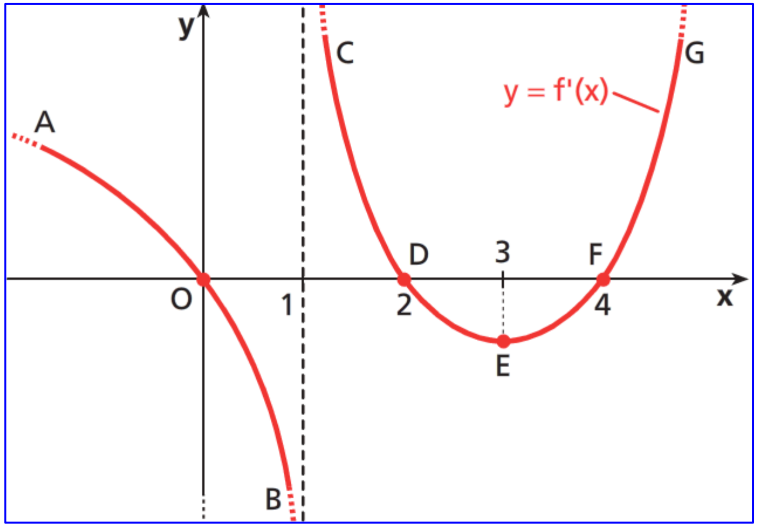
Nei tratti NM e PQ la funzione $f(x)$ è crescente, quindi $f'(x) > 0$, mentre nei tratti MP e QR $f(x)$ è decrescente, quindi $f'(x) < 0$.

Nei punti di flesso F e G di $f(x)$ si ha $f''(x) = 0$, quindi $f'(x)$ ha un minimo in $x = 0$ e un massimo in $x = 2$.



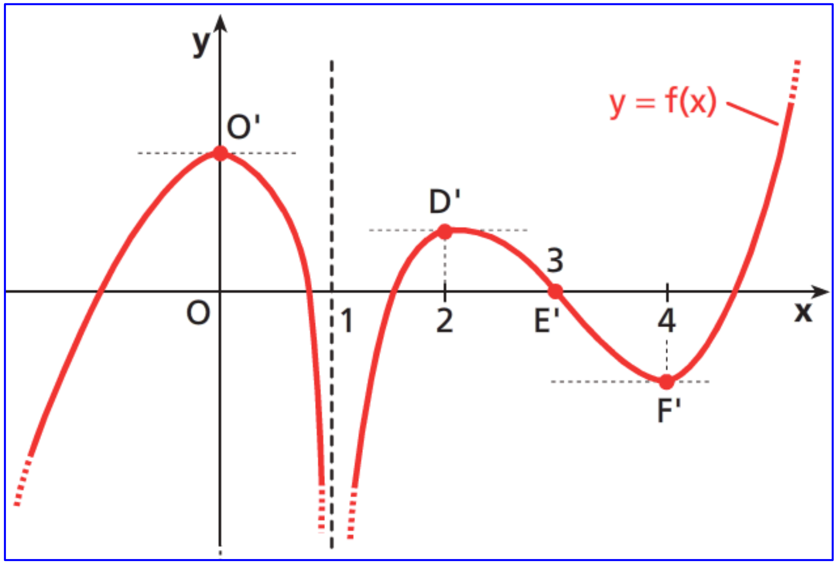
ESERCIZIO GUIDA

Dato il grafico della funzione $y = f'(x)$ della figura a lato, studiamo il possibile andamento del grafico di una funzione $f(x)$ che abbia $y = f'(x)$ come derivata.



Nei tratti AO, CD, FG in cui $f'(x)$ è positiva, la funzione $y = f(x)$ è crescente, mentre nei tratti OB e DEF in cui $f'(x)$ è negativa $y = f(x)$ è decrescente. In corrispondenza dei punti O, D, F in cui $f'(x) = 0$ si hanno punti del grafico di $f(x)$ a tangente orizzontale.

Tracciamo quindi un possibile andamento grafico della funzione $y = f(x)$.



Se si trasla il grafico di un vettore parallelo all'asse y, si ottiene ancora il grafico di un'altra funzione che ha per derivata $y = f'(x)$. Rispetto alla precedente la nuova funzione ha come equazione $y = f(x) + c$, con c costante.

APPLICAZIONI DELLO STUDIO DI UNA FUNZIONE

Possiamo applicare lo studio delle funzioni nella risoluzione delle **equazioni parametriche**, cioè equazioni nell'incognita x che dipendono da un parametro k, per le quali si vogliono determinare, al variare di k, le soluzioni che appartengono a un intervallo assegnato.

➢ regola

In generale, per effettuare la discussione di un'equazione parametrica, si ricava il parametro k in funzione di x, cioè si riscrive l'equazione data nella forma $k = f(x)$. Risolvere questa equazione equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = k \end{cases}$$

È necessario, quindi, prima studiare la funzione $y = f(x)$ per poter disegnarne il grafico e poi ricercare le intersezioni tra questa curva e il fascio di rette $y = k$. Le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti di intersezione.

ESEMPIO

Discutiamo l'equazione parametrica

$$kx = \frac{1}{e^x}$$

nell'intervallo $-2 \leq x < 4$. Poiché $x = 0$ non è soluzione dell'equazione assegnata, dividiamo per x e otteniamo:

$$k = \frac{1}{xe^x}.$$

Posto $k = y$, abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{xe^x} \\ y = k \\ -2 \leq x < 4 \end{cases}$$

Dobbiamo trovare le intersezioni tra il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{xe^x}$ e le rette del fascio improprio $y = k$ che si trovano nell'intervallo $[-2; 4[$.

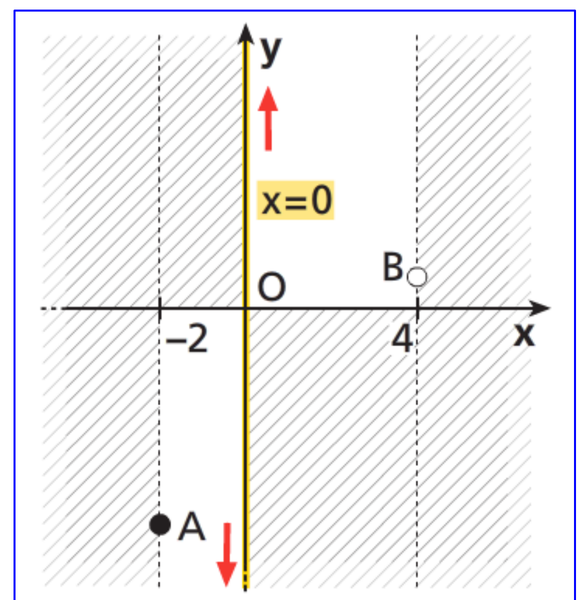
Studiamo la funzione $f(x)$ in questo intervallo.
Osserviamo che $f(x)$ non è definita per $x = 0$ e inoltre:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{xe^x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{xe^x} = +\infty.$$

Quindi l'asse y è un asintoto verticale.
La funzione non interseca gli assi cartesiani e il suo grafico è compreso tra i punti $A\left(-2; -\frac{e^2}{2}\right)$ e $B\left(4; \frac{1}{4e^4}\right)$. Il punto B non appartiene al grafico della funzione perché $x = 4$ non appartiene all'intervallo considerato.
Poiché e^x è sempre positiva, abbiamo:

$$f(x) > 0 \text{ per } x > 0;$$

$$f(x) < 0 \text{ per } x < 0.$$



Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = -\frac{e^x + xe^x}{x^2 e^{2x}} = -\frac{1+x}{x^2 e^x}.$$

Il denominatore della derivata è sempre positivo per cui:

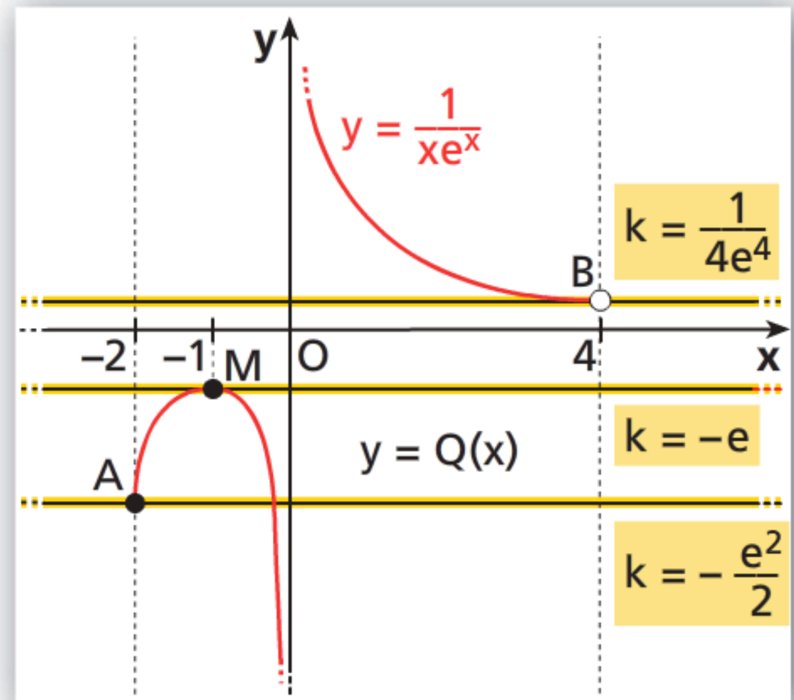
$$\text{per } x < -1, \text{ si ha } f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ è crescente;}$$

$$\text{per } x > -1, \text{ si ha } f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ è decrescente.}$$

Allora la funzione ha un punto di massimo relativo in $M(-1; -e)$.

Possiamo dunque tracciare il grafico di $f(x)$ (figura 7).

Osservando la figura, vediamo che:



- per $k < -\frac{e^2}{2}$, le rette del fascio intersecano la curva $y = f(x)$ in un solo punto di ascissa x_1, con $-1 < x_1 < 0$;
- per $-\frac{e^2}{2} \leq k \leq -e$ le rette del fascio intersecano la curva in due punti di ascissa x_1 e x_2, con $-2 \leq x_1 \leq -1$ e $-1 < x_2 < 0$ (per $k = -e$, la retta è tangente alla curva nel punto M, che ha ascissa $x_1 = -1$);
- per $-e < k \leq \frac{1}{4e^4}$, le rette del fascio non intersecano la curva;
- per $k > \frac{1}{4e^4}$, le rette del fascio intersecano la curva in un solo punto di ascissa x_1, con $0 < x_1 < 4$.

Riassumendo, nell'intervallo $[-2; 4[$, l'equazione parametrica data:

- non ha soluzioni per $-e < k \leq \frac{1}{4e^4}$;
- ha una soluzione x_1 per $k < -\frac{e^2}{2}$ e per $k > \frac{1}{4e^4}$;
- ha due soluzioni x_1 e x_2 per $-\frac{e^2}{2} \leq k \leq -e$.

Per discutere un'equazione parametrica si può anche riscrivere l'equazione in modo da risolvere un sistema equivalente costituito dall'equazione di una curva fissa e un fascio di curve o rette.

Nell'esempio precedente si potrebbe utilizzare il sistema:

$$\begin{cases} y = e^{-x} \\ y = kx \\ -2 \leq x < 4 \end{cases}$$

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il numero delle soluzioni reali della seguente equazione parametrica al variare di k in $\mathbb{R}$:

$$3x^4 - kx^3 + 1 = 0, \quad \text{con } -1 \leq x \leq 2.$$

1. Osserviamo che $x = 0$ non è soluzione dell'equazione parametrica, dunque ricaviamo k dividendo per x^3:

$$k = \frac{3x^4 + 1}{x^3}.$$

2. Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}.$$

a) Dominio D: $x \neq 0$.

b) La funzione è dispari perché: $f(-x) = -\dfrac{3x^4 + 1}{x^3} = -f(x)$.

c) Non ci sono intersezioni con gli assi.

d) Segno: $\dfrac{3x^4 + 1}{x^3} > 0$ per $x > 0$.

e) Limiti agli estremi del dominio:

- $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$, $x = 0$ asintoto verticale;
- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$;
- $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$,

  $$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3x^4 + 1}{x^3} - 3x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{3x^4} + 1 - \cancel{3x^4}}{x^3} = 0,$$

  quindi $y = 3x$ è l'equazione dell'asintoto obliquo.

f) Massimi, minimi, flessi.

$$y' = \frac{12x^3 \cdot x^3 - 3x^2(3x^4 + 1)}{x^6} = \frac{12x^6 - 9x^6 - 3x^2}{x^6} = \frac{3x^6 - 3x^2}{x^6} = \frac{3x^2(x^4 - 1)}{x^6} = \frac{3\,(x^4 - 1)}{x^4}.$$

Si ha $y' > 0$ quando:

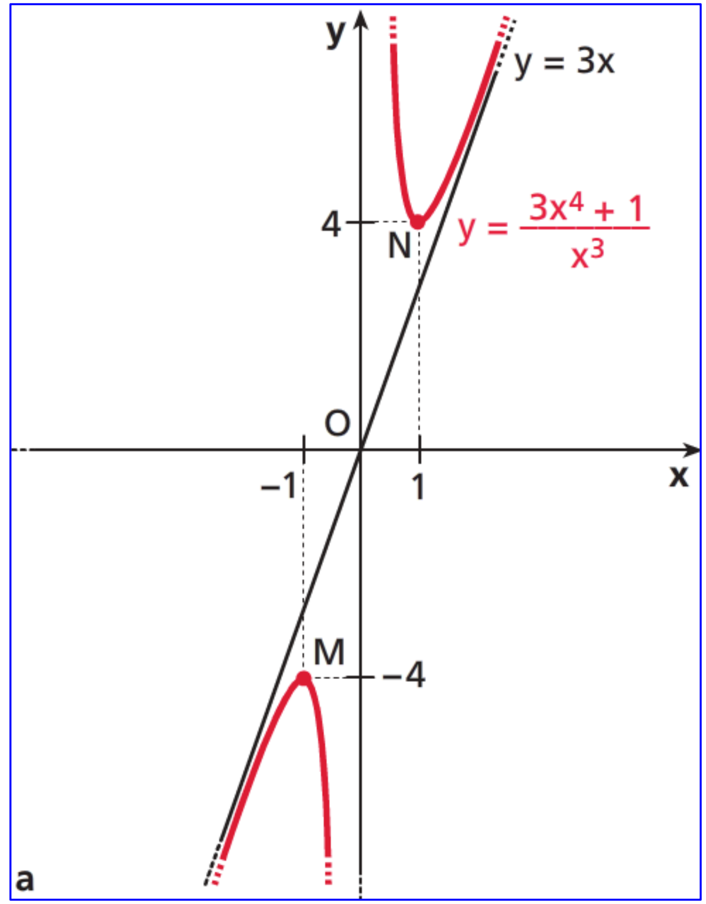
$$x^4 - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -1 \ \vee \ x > 1.$$

La funzione è crescente per $x < -1 \ \vee \ x > 1$, decrescente per $-1 < x < 1 \wedge x \neq 0$.

Per $x = -1$ si ha un massimo: $M(-1; -4)$.

Per $x = 1$ si ha un minimo: $N(1; 4)$.

Tralasciamo lo studio di y'' e tracciamo il grafico della funzione $f(x)$ (figura *a*).



3. Consideriamo il grafico soltanto per $-1 \leq x \leq 2$ e lo intersechiamo con un fascio di rette di equazione $y = k$, con $k \in \mathbb{R}$ (figura *b*).

Abbiamo:

- per $k < -4$, una soluzione;
- per $k = -4 \vee k = 4$, due soluzioni coincidenti;
- per $4 < k < \frac{49}{8}$, due soluzioni distinte;
- per $k = \frac{49}{8}$, due soluzioni delle quali una limite;
- per $k > \frac{49}{8}$, una soluzione.

In sintesi:

- per $k = -4 \vee 4 \leq k \leq \frac{49}{8}$, due soluzioni;
- per $k < -4 \vee k > \frac{49}{8}$, una soluzione.